PROBLEMY KOLEJNICTWA
RAILWAY REPORT Zeszyt 181 (grudzień 2018) ISSN 0552-2145 (druk) ISSN 2544-9451 (on-line)

Dynamika ruchu modelu pojazdu szynowego po torze prostym z nierównością pionową

Mirosław DUSZA[1]

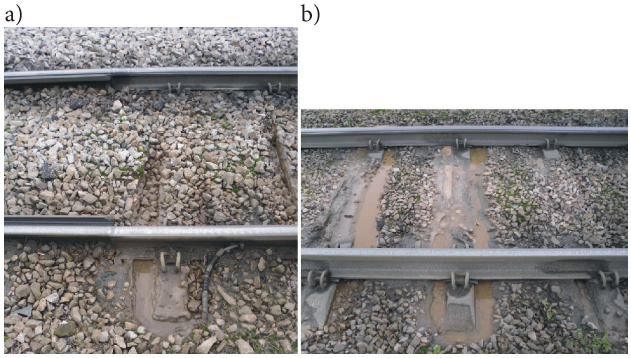
Streszczenie
W czasie wieloletniej eksploatacji toru kolejowego mogą pojawić się zmiany warunków terenowych, skutkujące utratą właściwości systemów odwadniających. Brak dostatecznego odwodnienia podtorza prowadzi do utraty jego spoistości nadanej przez zagęszczenie na etapie budowy toru. Taki stan sprzyja zagłębianiu się w podtorzu, podczas przejazdu pojazdów, podsypki tłuczniowej znajdującej się bezpośrednio pod podkładami. W efekcie podkłady tracą podparcie na podsypce. W zależności od wielkości strefy obejmującej niedostateczne odwodnienie, zjawisko utraty podparcia może obejmować jeden lub kilka sąsiadujących podkładów. Przejazd pojazdów przez taką strefę generuje nierówność pionową toru. Niniejszy artykuł jest poświęcony zbadaniu wpływu takich nierówności na dynamikę ruchu pojazdu. Utworzono model układu wagon pasażerski – tor na podsypce z wykorzystaniem narzędzia VI-Rail. Symulowano ruch wagonu w zakresie prędkości eksploatacyjnych, skupiając uwagę na obserwacji sił kontaktowych koło – szyna podczas przejazdu przez nierówności pionowe o różnych długościach. Uzyskane wyniki odniesiono do obowiązujących obecnie kryteriów i przepisów.

Słowa kluczowe: dynamika pojazdu szynowego, nierówności toru, siły kontaktowe koło-szyna, symulacje numeryczne

1. Wstęp

Wieloletnia eksploatacja toru kolejowego powoduje jego stopniową degradację, czasem znacząco różną na sąsiadujących odcinkach toru. Jest to złożony proces, na który ma wpływ wiele czynników. Jednym z nich są właściwości podtorza, które mogą zmieniać się w czasie wieloletniej eksploatacji toru. Efektem degradacji toru jest powstawanie nierówności o różnych wartościach i kierunkach. Powiększają się one w miarę upływu czasu oraz masy ładunków transportowanych i wpływają bezpośrednio na dynamikę układu pojazd – tor [8]. Ogólnie, nierówności toru dzieli się na podłużne i poprzeczne [1, 13]. W przedstawionych badaniach analizowano wpływ nierówności podłużnych utożsamianych z nierównościami pionowymi. Jedną z przyczyn powstawania i powiększania się tego typu nierówności jest nierównomierne osiadanie toru, najczęściej spowodowane niekorzystnymi właściwościami podtorza (np. ograniczona przepuszczalność wód opadowych). Typowym, obserwowalnym objawem jest wówczas ugięcie jednego lub obu toków szynowych na długości rozmieszczenia trzech lub więcej sąsiadujących podkładów podczas przetaczania się zestawów kołowych. Krańcowym stadium tego typu uszkodzeń są tzw. „wychlapki" świadczące o całkowitej utracie podparcia przez część podkładu lub cały podkład (rys. 1).

a) b)



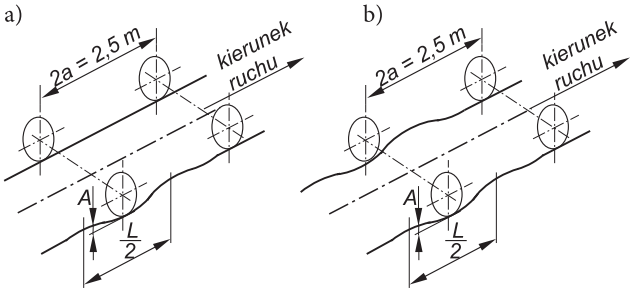
Rys. 1. Brak podparcia pionowego podkładu: a) pod jednym tokiem szynowym, b) na całej długości podkładu [fot. M. Dusza]

Zainicjowane ugięcie toru na jednym podkładzie powoduje zwiększenie sił oddziaływania zestawów kołowych na szyny nad podkładami sąsiadującymi. Powoduje to przyspieszenie osiadania tych podkładów i powiększenie strefy nierówności toru podczas przetaczania zestawów kołowych. Konsekwencje tego typu zniszczeń prowadzą wprost do trwałych odkształceń toru i w przypadku braku natychmiastowego wprowadzenia ograniczeń eksploatacyjnych są realnym zagrożeniem wykolejenia pojazdu [2, 12, 15].

[1] Dr hab. inż.; Politechnika Warszawska, Wydział Transportu; e-mail: mdusza@wt.pw.edu.pl.

2. Cel i zakres badań

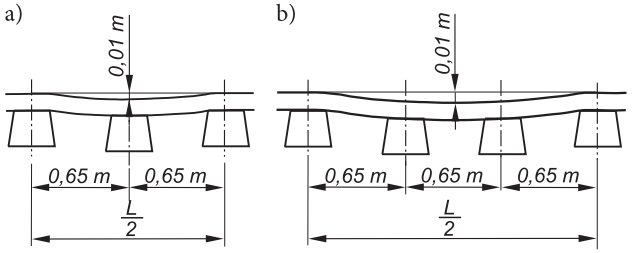
Zbadano oddziaływania dynamiczne w układzie pojazd – tor spowodowane przejazdem przez pojedynczą nierówność podłużną powstałą na skutek utraty podparcia kolejno: jednego, dwóch i trzech sąsiadujących podkładów w pierwszym etapie badań pod jednym tokiem szynowym (rys. 1a i 2a). Przejazd każdego zestawu kołowego pojazdu powoduje ugięcie pionowe toku szynowego (prawego) i powstanie tzw. wichrowatości toru [1, 13]. Przyjmując typowy rozstaw podkładów w torze 0,65 m [1, 13, 14] w zależności od liczby podkładów, które nie mają podparcia na podsypce, długości fal nierówności podłużnej toku mogą wynosić:
L = 2,6 m – jeden podkład niepodparty,
L = 3,9 m – dwa podkłady niepodparte,
L = 5,2 m – trzy podkłady niepodparte.



Rys. 2. Nierówność podłużna: a) na prawym toku szynowym, b) na obu tokach szynowych [opracowanie własne]

Amplituda ugięcia toku szynowego A zależy między innymi od obciążeń pionowych pochodzących od zestawów kołowych. W badaniach przedstawionych w artykule, przyjmowano stałą wartość A = 0,01 m. Nierówność jest interpolowana w symulacjach połówką sinusoidy o okresie i amplitudzie odpowiadającym podanym wartościom L i A. Baza wózków modelowanego wagonu wynosi $2a$ = 2,5 m, a więc dla każdej wartości L przejazd w miejscu nierówności generuje wichrowatość toru o wartościach znacząco większych od wartości dopuszczalnych na nowym torze, stwarzając tym samym niebezpieczeństwo gwałtownej zmiany wartości sił kontaktowych koło – szyna [9]. Stanowi również zagrożenie wykolejeniem, szczególnie dla pojazdów o dużej sztywności prowadzenia zestawów kołowych (np. wagony towarowe) [15].

Zbadano wybrane parametry układu pojazd – tor (w artykule siły oddziaływania koło – szyna), podczas przejazdu pojazdu z prędkością zmienianą od 5 do 60 m/s po torze prostym z nierównością podłużną odpowiadającą utracie podparcia kolejno: jednego, dwóch i trzech podkładów (rys. 3). Pierwszy etap badań, to brak podparcia podkładów na jednym toku szynowym (prawym, rys. 2a). Drugi etap, to symetryczny brak podparcia na obu tokach szynowych (rys. 2b). Poza tym tor nie wykazuje żadnych innych nierówności. Prędkość krytyczna badanego modelu pojazdu wynosi v_n = 61,7 m/s [3–6], a więc przejazd przez nierówność jest jedyną przyczyną zmian obserwowanych parametrów (nie ma warunków sprzyjających powstaniu, np. drgań samowzbudnych) [16, 18].



Rys. 3. Nierówność pionowa (podłużna) jako efekt utraty podparcia przez: a) jeden podkład, b) dwa podkłady sąsiednie [opracowanie własne]

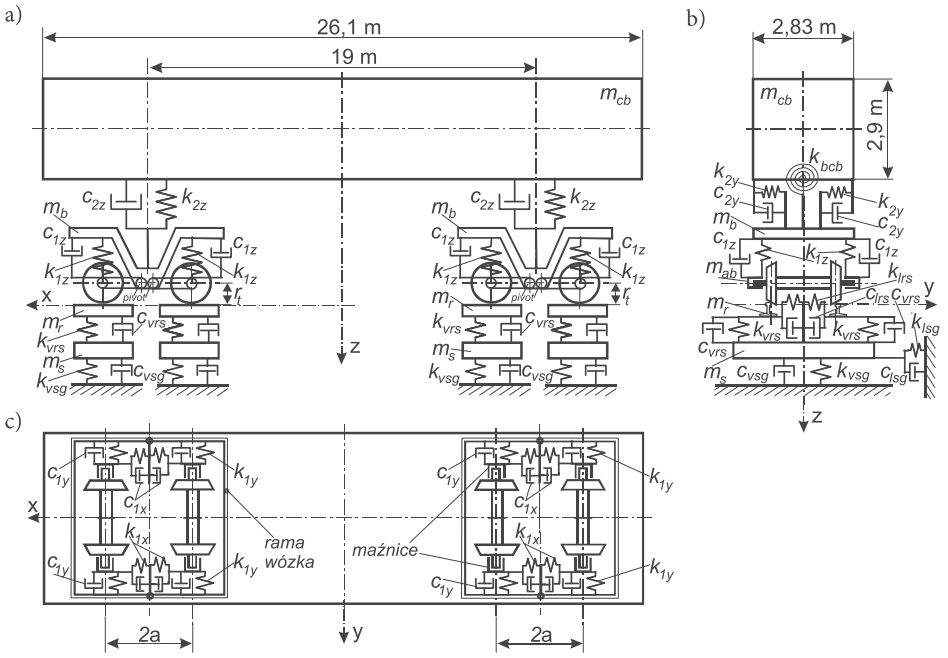
3. Badany model

Model utworzono za pomocą oprogramowania inżynierskiego VI-Rail. Jest to dyskretny model wagonu pasażerskiego typu 127A (rys. 4). Modele wózków są wzorowane na konstrukcji typu 25AN. Kompletny model wagonu tworzy 15 sztywnych brył: pudło, dwie ramy wózków, cztery zestawy kołowe i osiem maźnic. Bryły sztywne są połączone elementami sprężysto-tłumiącymi o charakterystykach liniowych i bi-liniowych. Model wagonu uzupełniony jest pionowo i poprzecznie podatnym modelem toru o parametrach odpowiadających parametrom europejskiego toru na podsypce. Zastosowano nominalne zarysy kół S1002 i szyn 60E1 o pochyleniu 1:40. Nieliniowe parametry kontaktowe są obliczane za pomocą programu ArgeCare RSGEO. Do obliczeń stycznych sił kontaktowych koło – szyna używana jest uproszczona teoria Kalkera zaimplementowana w postaci procedury FASTSIM [8]. Równania ruchu rozwiązywane są z wykorzystaniem procedury Geara. Bardziej szczegółowy opis modelu można znaleźć w [4–6, 16].

4. Wyniki badań

4.1. Brak podparcia podkładów pod jednym tokiem szynowym

Parametrami szczególnie istotnymi ze względu na bezpieczeństwo ruchu są siły kontaktowe koło – szyna. Obserwowano zmiany tych sił dla pierwszego zestawu kołowego na prawym toku szynowym. Wyniki przykładowej symulacji ruchu z prędkością 20 m/s przedstawiono na rysunku 5. W tym przypadku w torze istnieje nierówność odpowiadająca dwóm podkła-



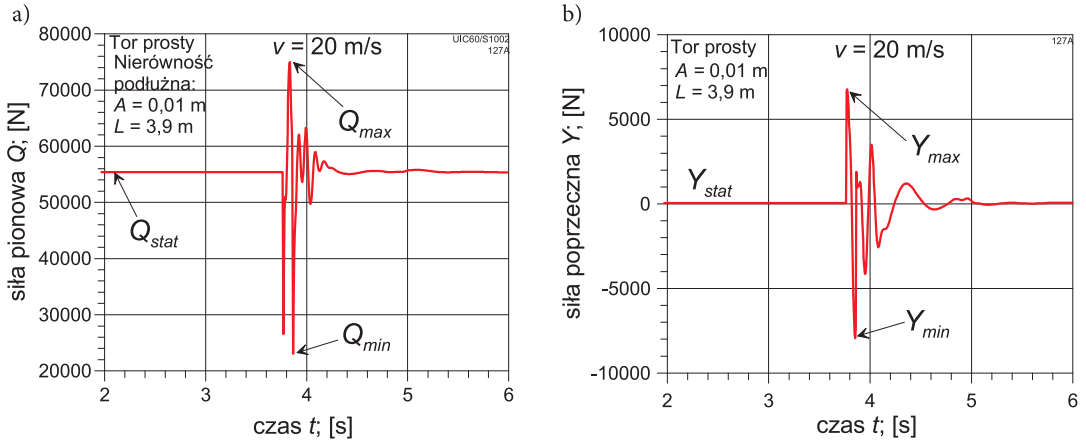
Rys. 4. Schemat badanego modelu, widok: a) z boku, b) z przodu, c) z góry [opracowanie własne]

dom niepodpartym (L = 3,9 m). Z każdej symulacji odczytywana jest wartość minimalna (*min.*) i maksymalna (*max*) siły pionowej Q i poprzecznej Y.

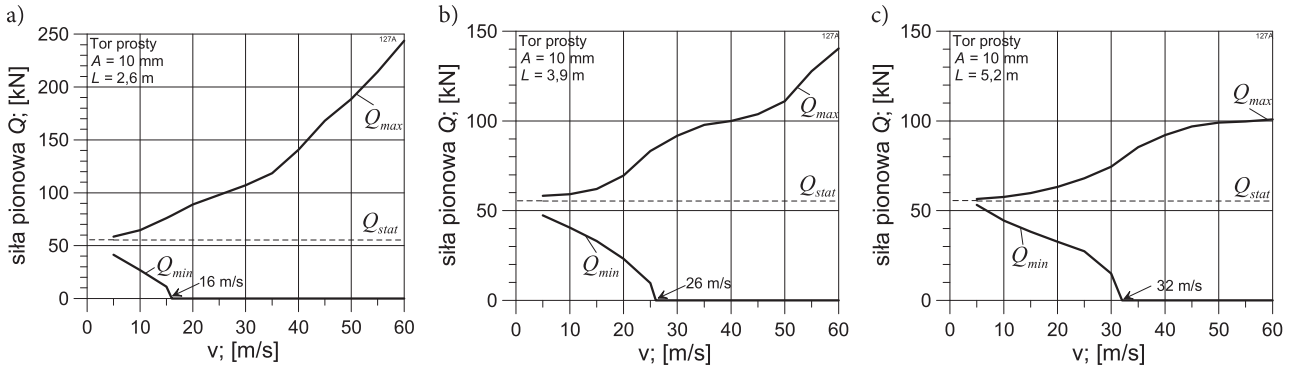
Stała wartość Q_{stat} wynika z obciążeń pionowych statycznych każdego koła, która w badanym modelu wynosi 55 390 N [4]. W miarę zwiększania prędkości ruchu wagonu, rosną wartości maksymalne i maleją wartości minimalne sił pionowych. Zestawiając odczyty wyników uzyskanych prędkości ruchu wagonu z zakresu 5...60 m/s, sporządzono wykresy przedstawione na rysunku 6.

Można zauważyć, że w zależności od długości fali nierówności istnieje charakterystyczna prędkość ruchu, przy której minimalna wartość siły pionowej Q_{min} osiąga zero. Wartość ta rośnie wraz ze wzrostem długości nierówności i wynosi: dla L = 2,6 m – 16 m/s, dla L = 3,9 m – 26 m/s, dla L = 5,2 m – 32 m/s. W rozważaniach teoretycznych oznacza to chwilowy wzrost wartości współczynnika bezpieczeństwa przeciw wykolejeniu Y/Q do bardzo dużych wartości (teoretycznie do ∞) [12, 15]. W układzie rzeczywistym może to oznaczać chwilową utratę kontaktu koło – szyna stanowiącą zagrożenie wykolejeniem. Wartości maksymalne siły kontaktowej pionowej również zależą od długości nierówności. Największe wartości występują dla najkrótszej nierówności L = 2,6 m i osiągają około 240 kN, dla L = 3,9 m dochodzą do około 140 kN. Najmniejsze wartości pojawiają się dla L = 5,2 m i osiągają około 100 kN.

Siły kontaktowe koło – szyna poprzeczne Y zmieniają wartość i kierunek. Z punktu widzenia oddzia-



Rys. 5. Siły kontaktowe koło – szyna: a) pionowa, b) poprzeczna; na prawym toku szynowym pierwszego zestawu kołowego podczas przejazdu przez nierówność podłużną o amplitudzie A = 0,01 m i długości fali L = 3,9 m z prędkością v = 20 m/s [opracowanie własne]



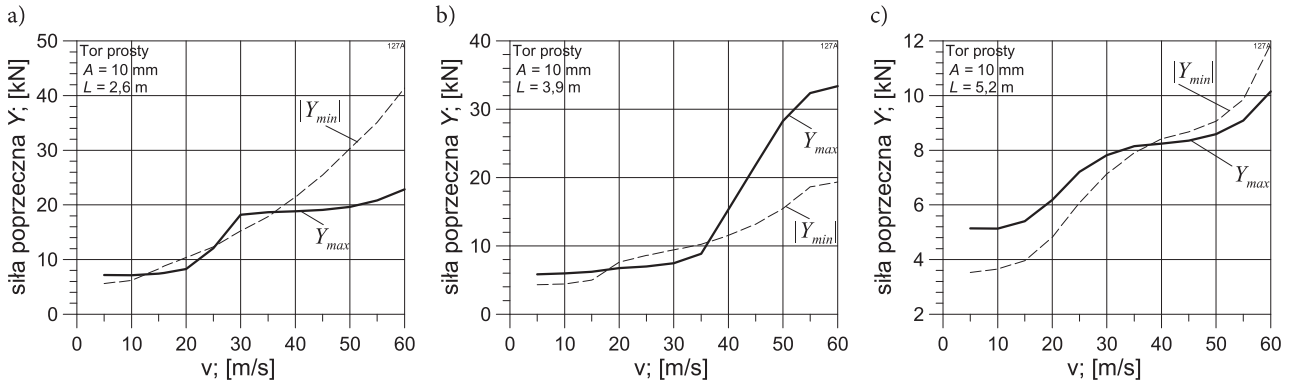
Rys. 6. Wartości minimalne i maksymalne sił kontaktowych pionowych Q koło – szyna na prawym toku szynowym pierwszego zestawu kołowego podczas przejazdu przez nierówności o długości fali L: a) 2,6 m, b) 3,9 m, c) 5,2 m [opracowanie własne]

ływania na tor, kierunek działania siły Y na torze prostym nie ma znaczenia. Aby łatwiej porównać wartości Y_{min} z Y_{max}, na rysunku 7 przedstawiono wartość bezwzględną $|Y_{min}|$. Największe wartości Y pojawiają się podczas przejazdu przez nierówność o długości fali L = 2,6 m i osiągają około 40 kN. Dla L = 3,9 m są nieco mniejsze, a dla L = 5,2 m znacząco mniejsze i dochodzą do około 12 kN.

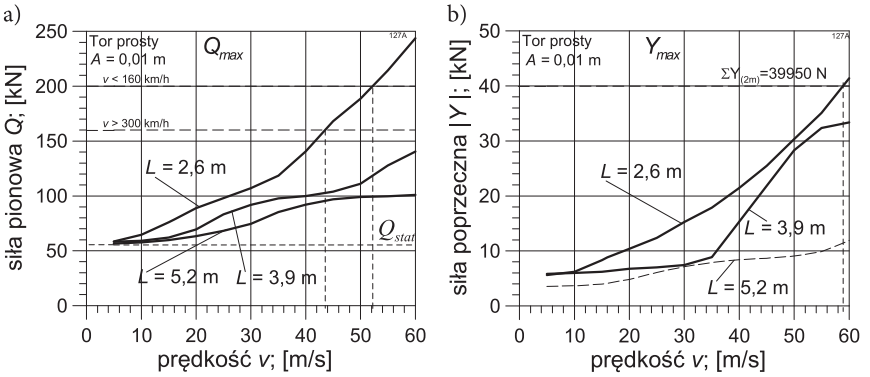
Zgodnie z normą [7], graniczne dopuszczalne wartości sił pionowego oddziaływania na tor $Q_{max,lim}$ zależą od maksymalnej dopuszczalnej prędkości pojazdów osiąganej na analizowanym odcinku toru v_{adm} i mogą wynosić:

$Q_{max,lim}$ = 200 kN – dla $v_{adm} \leq 160$ km/h (ok. 44,44 m/s),
$Q_{max,lim}$ = 160 kN – dla $v_{adm} > 300$ km/h (ok. 83,33 m/s).

Dla każdej z badanych długości fali nierówności, siły pionowego oddziaływania na tor rosną wraz ze wzrostem prędkości i tylko dla najkrótszej fali nierówności osiągają i przekraczają wartości dopuszczalne (rys. 8a). Przy prędkości około 52 m/s (około 187,2 km/h) przekroczona jest największa



Rys. 7. Wartości minimalne i maksymalne sił kontaktowych poprzecznych koło – szyna na prawym toku szynowym pierwszego zestawu kołowego podczas przejazdu przez nierówności o długości fali L: a) 2,6 m, b) 3,9 m, c) 5,2 m [opracowanie własne]



Rys. 8. Wartości maksymalne sił kontaktowych pionowych i poprzecznych koło – szyna na prawym toku szynowym pierwszego zestawu kołowego podczas przejazdu przez nierówności o długości fali L = 2,6 m, 3,9 m i 5,2 m [opracowanie własne]

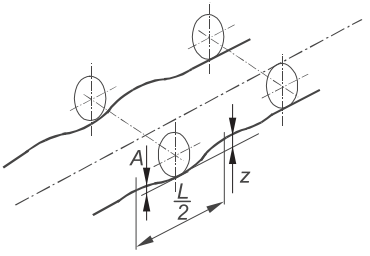
dopuszczalna wartość $Q_{max,lim}$ = 200 kN. Nie stanowi to problemu, gdyż dopuszczalna prędkość wynosi wówczas $v_{adm} \leq$ 160 km/h. Natomiast przy prędkości około 44 m/s (około 158,4 km/h) przekroczona zostaje wartość $Q_{max,lim}$ = 160 kN, dopuszczalna na odcinkach toru, gdzie mogą być rozwijane prędkości v_{adm} > 300 km/h. Pojawienie się takiej nierówności stwarza więc istotne ograniczenie w korzystaniu z możliwości ruchu z dużymi prędkościami na trasach przystosowanych do takich prędkości (Koleje Dużych Prędkości). Dla większych długości fali nierówności (L = 3,9 i 5,2 m) w badanym zakresie prędkości ruchu 0...60 m/s, siły pionowe nie przekraczają najmniejszej dopuszczalnej wartości $Q_{max,lim}$ = 160 kN.

Na rysunku 8b zestawiono ekstremalne wartości bezwzględne sił poprzecznego oddziaływania koła przejeżdżającego przez nierówność na tor $|Y|$. Siły te rosną wraz ze wzrostem prędkości. We wcześniejszych badaniach [4] określono dopuszczalną wartość siły poprzecznego oddziaływania na tor dla badanego modelu układu pojazd – tor na podstawie kryterium Prudhome'a. Wartość tej siły została oszacowana na $\Sigma Y_{(2m)}$ = 39 950 N. Nieprzekraczanie tej wartości zapewni utrzymanie stałego położenia szyn i podkładów względem podsypki. Można zauważyć, że tylko dla najkrótszej fali nierówności L = 2,6 m dopuszczalna wartość jest przekroczona dla prędkości większych od 59 m/s (212,4 km/h). Dla dwóch pozostałych długości fali nierówności L, siły $|Y|$ mieszczą się w zakresie wartości dopuszczalnych.

4.2. Brak podparcia podkładów na całej długości

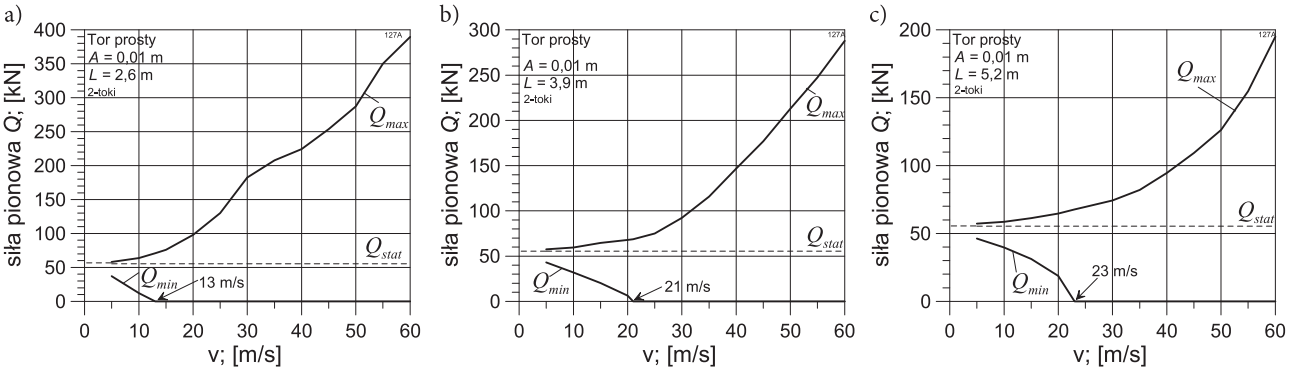
Drugi analizowany przypadek odpowiada utracie podparcia podkładów na całej długości (rys. 8b i 9). W przedstawianych badaniach, taki stan został zamodelowany symetryczną nierównością podłużną na obu tokach szynowych o parametrach analogicznych jak w poprzednio badanym przypadku (takie same długości fal i amplituda 0,01 m). W tym przypadku wichrowatość toru nie występuje. Parametrami obserwowanymi są siły kontaktowe koło – szyna pierwszego zestawu kołowego na prawym toku szynowym.

Jak można zauważyć, charakter zmian wartości siły pionowej Q w funkcji prędkości ruchu jest podobny jak w poprzednio badanym przypadku, lecz wartości są znacząco większe (rys. 10). Wartości maksymalne Q_{max} rosną wraz ze wzrostem prędkości dla każdej nierówności toru. Największe $Q_{max} \approx$ 390 kN występują dla L = 2,6 m, dla L = 3,9 m Q_{max} osiąga 290 kN i dla L = 5,2 m, $Q_{max} \approx$ 195 kN. Wartości te są prawie dwukrotnie większe niż zaobserwowane podczas przejazdu przez nierówność występującą pod jednym tokiem szynowym. Wartości minimalne Q maleją wraz ze wzrostem prędkości i również tak, jak w poprzednio badanym przypadku istnieją charakterystyczne wartości prędkości, przy których Q_{min} = 0. Są jednak mniejsze od tych występujących w poprzednim przypadku i wynoszą: 13 m/s dla L = 2,6 m (poprzednio 16 m/s), 21 m/s dla L = 3,9 m (poprzednio 26 m/s) i 23 m/s dla L = 5,2 m (poprzednio 32 m/s). W układach rzeczywistych może to oznaczać, że dla symetrycznej obustronnej nierówności pionowej (brak podparcia podkładów na całej długości), przy mniejszych prędkościach ruchu nastąpi utrata kontaktu kół z szynami.

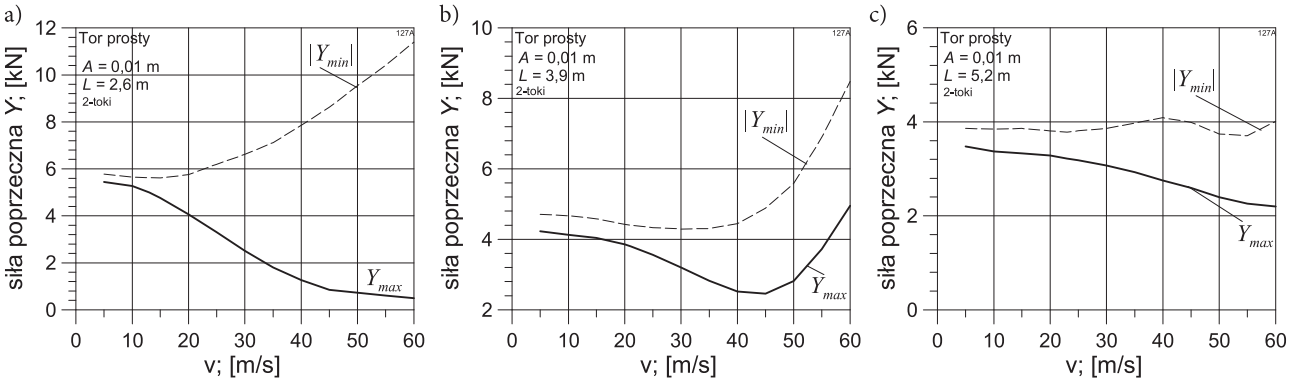


Rys. 9. Symetryczna nierówność pionowa na obu tokach szynowych [opracowanie własne]

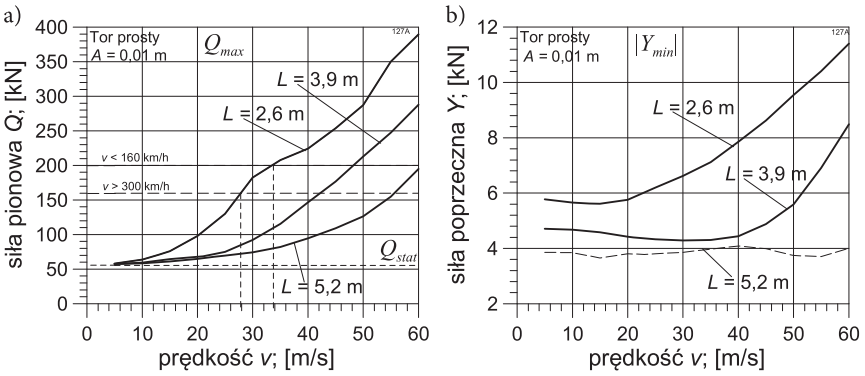
Ekstremalne wartości sił kontaktowych poprzecznych Y rosną wraz ze wzrostem prędkości (rys. 11). Tak jak poprzednio ruch odbywa się po torze prostym, a więc kierunek działania siły Y nie ma znaczenia. Na wykresach przedstawiono ujemne wartości Y_{min} jako $|Y_{min}|$.



Rys. 10. Wartości minimalne i maksymalne sił kontaktowych pionowych koło – szyna na prawym toku szynowym pierwszego zestawu kołowego podczas przejazdu przez nierówności obejmujące oba toki szynowe o długości fali L: a) 2,6 m, b) 3,9 m, c) 5,2 m [opracowanie własne]



Rys. 11. Wartości minimalne i maksymalne sił kontaktowych poprzecznych koło – szyna na prawym toku szynowym pierwszego zestawu kołowego podczas przejazdu przez nierówności obejmujące oba toki szynowe o długości fali L: a) 2,6 m, b) 3,9 m, c) 5,2 m [opracowanie własne]



Rys. 12. Wartości maksymalne sił kontaktowych pionowych (a) i poprzecznych (b) koło – szyna na prawym toku szynowym pierwszego zestawu kołowego podczas przejazdu przez nierówność pionową symetryczną na obu tokach szynowych o długości fali: L = 2,6 m, 3,9 m i 5,2 m [opracowanie własne]

Porównując ekstremalne wartości Y dla obu badanych przypadków (rys. 7 i 11) można zauważyć, że dla symetrycznej obustronnej nierówności obejmującej oba toki szynowe wartości Y są znacząco mniejsze. Dla długości fali nierówności L = 2,6 m, siły poprzeczne osiągają około 11,5 kN (poprzednio około 40 kN), dla L = 3,9 m około 8,2 kN (poprzednio około 34 kN) i dla L = 5,2 m około 4 kN (poprzednio około 12 kN).

Wyniki obliczeń zestawiono na rysunku 12. Odnosząc je do obowiązujących norm i przepisów [7, 14] można zauważyć, że dopuszczalne wartości sił pionowych zostają przekroczone podczas przejazdu przez nierówność o każdej badanej długości. Najwcześniej dla L = 2,6 m, bo już przy prędkości około 28 m/s, siła Q osiąga wartości dopuszczalne na trasach o dużych prędkościach i przy około 34 m/s na wszystkich trasach. Dla L = 3,9 m dopuszczalne wartości Q zostają osiągnięte przy prędkościach około 42 i 48 m/s. Przy prędkościach powyżej 55 m/s dla najdłuższej fali nierówności L = 5,2 m siła Q przekracza dopuszczalne wartości.

5. Wnioski

Linie kolejowe przecinają tereny, na których należyte odwodnienie podtorza stanowi istotny problem. Skutkiem niedostatecznego odwodnienia może być pojawianie się pionowych nierówności toru. Wykonane badania pokazują możliwość znaczącego wzrostu obciążeń dynamicznych toru, na którym jeden lub więcej sąsiadujących podkładów nie jest właściwie podpartych w wyniku utraty właściwości sprężystych podtorza. Obciążenia o zwiększonej wartości muszą być przenoszone przez podkład sąsiadujący z podkładami niepodpartymi. Powstają więc warunki sprzyjające rozszerzaniu strefy podkładów niepodpartych i dalszej degradacji toru. Utrata podparcia jednego toku szynowego przy podpartym drugim toku, prowadzi do zwiększonej wichrowatości toru. Nadmiernie wysokie wartości tego parametru sprzyjają chwilowej utracie kontaktu koło – szyna i wykolejeniu, szczególnie pojazdów o dużej sztywności zawieszenia na pierwszym stopniu usprężynowania.

W przypadku pojazdów trakcyjnych następuje ograniczenie lub utrata parametrów trakcyjnych (poślizg koło – szyna) i przyspieszone zużycie kół i szyn [11]. Wzrost obciążenia toru spowodowany badaną nierównością ma charakter dynamiczny. Maksymalne wartości siły pionowej i poprzecznej rosną wraz ze wzrostem prędkości ruchu pojazdu. Jednakże długość fali nierówności również ma znaczący wpływ na maksymalne wartości sił kontaktowych. Największe wartości występują dla najkrótszej fali nierówności (jeden podkład niepodparty) i maleją wraz ze

wzrostem długości fali nierówności. Być może taka zależność wynika z przyjęcia stałej wartości amplitudy ugięcia toku szynowego dla każdej badanej długości nierówności. W układach rzeczywistych należy się spodziewać raczej wzrostu amplitudy ugięcia wraz ze wzrostem długości fali nierówności (większa liczba podkładów niepodpartych) przy określonych obciążeniach od pojazdu. Sprawdzenie, czy taka zależność występuje, wymaga dalszych badań.

Czas przejazdu koła pojazdu przez badane nierówności wynosi ułamki sekundy (rys. 5). Obserwowane efekty przejazdu należy więc zaliczyć do procesów szybkozmiennych. Wyjaśnienia wymaga kwestia rozdzielczości obserwowanych parametrów. W obliczeniach numerycznych parametrem decydującym o rozdzielczości jest tzw. krok tablicowania wyników. W przedstawionych badaniach zadawano czas symulacji ruchu 15 sekund i w tym czasie odbywał się zapis wyników obliczeń w postaci 2500 wierszy tablicowych. Krok tablicowania wyników wynosi więc 15/2500 = 0,006 s (czas jest zmienną niezależną). Oznacza to, że wartości szczytowe (impulsy) sił kontaktowych trwające krócej niż 0,006 s mogą być niezidentyfikowane w badaniach.

Literatura

1. Bałuch H.: *Diagnostyka nawierzchni kolejowej*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2003, s. 189.
2. Chudzikiewicz A., Sowiński B., Szulczyk A.: *Zagrożenie bezpieczeństwa ruchu pojazdów szynowych spowodowane stanem toru*, Problemy Eksploatacji, Maintenance Problems, 2009 nr 4, s. 177–192.
3. Dusza M., Zboiński K.: *Wybrane zagadnienia dokładnego wyznaczania wartości prędkości krytycznej modelu pojazdu szynowego*, Kwartalnik Pojazdy Szynowe, 1/2012, s. 13–19.
4. Dusza M.: *Stateczność ruchu układu pojazd szynowy – tor. Modelowanie, metoda, badania*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2016, s. 1–143.
5. Dusza M.: *The study of track gauge influence on lateral stability of 4-axle rail vehicle model*. Archives of Transport, volume 30, issue2, Warsaw 2014, pp. 7–20.
6. Dusza M.: *The wheel-rail contact friction influence on high speed vehicle model stability*, Transport Problems, volume 10, issue 3, (online 2300-861X), pp. 73–86, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2015.
7. EN 14363:2005: Kolejnictwo – Badania właściwości dynamicznych pojazdów szynowych przed dopuszczeniem do ruchu – Badanie właściwości biegowych i próby stacjonarne.
8. Iwnicki S. (editor): *Handbook of railway vehicle dynamics*. CRC Press Inc., 2006.
9. Jian Zhang and other: *A linear complementary method for the solution of vertical vehicle-track interaction*, Vehicle System Dynamics, Vol. 56, No. 2, 2018, pp. 281–296.
10. Kalker J.J.: *A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact*, Vehicle System Dynamics 11, 1982, pp. 1–13.
11. Olofsson U. and others: *Tribology of the wheel-rail contact – aspects of wear, particle emission and adhesion*, Vehicle System Dynamics, Vol. 51, No. 7, July, 2013, pp. 1091–1120.
12. Sobaś M.: *Stan doskonalenia kryteriów bezpieczeństwa przed wykolejeniem pojazdów szynowych*, Pojazdy Szynowe nr 4, 2005, s. 1–13 i nr 2, 2006, s. 37–48.
13. Sysak J.: *Drogi Kolejowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1986.
14. Towpik K.: *Infrastruktura drogi kolejowej, obciążenia i trwałość nawierzchni*, Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji – PIB, Warszawa – Radom 2006.
15. Wilson N. and others: *Assessment of safety against derailment using simulations and vehicle acceptance test: a worldwide comparison of state-of-the-art assessment methods*, Vehicle System Dynamics, Vol. 49, No. 7, July 2011, pp. 1113–1157.
16. Zboiński K., Dusza M.: *Bifurcation analysis of 4-axle rail vehicle models in a curved track*, Nonlinear Dynamics, July 2017, Volume 89, Issue 2, DOI 10.1007/s11071-017-3489-y, pp. 863–885.
17. Zboiński K., Dusza M.: *Extended study of rail vehicle lateral stability in a curved track*. Vehicle System Dynamics, Vol. 49, No. 5, May 2011, pp. 789–810.
18. Zboiński K., Dusza M.: *Self-exciting vibrations and Hopf's bifurcation in non-linear stability analysis of rail vehicles in curved track*. European Journal of Mechanics, Part A/Solids, Vol. 29, No. 2, 2010, pp. 190–203.