

# Model układu napędowego tramwaju niskopodłogowego ze sprzęgłami czterocięglowymi

Henryk SANECKI<sup>1</sup>, Tomasz CZAUDERNA<sup>2</sup>

## Streszczenie

W artykule opisano budowę i zasadę działania układu napędowego stosowanego w niektórych tramwajach niskopodłogowych. Układ składa się z silników elektrycznych, przekładni zębatych, a także z wałów drążonych i sprzęgieł czterocięglowych przekazujących napęd na koła jezdne tramwaju. Zbudowano model dynamiczny oraz wyznaczono parametry potrzebne do symulacji. Jako przykład gotowych pojazdów wykorzystano wagony tramwajowe niskopodłogowe NGT6 eksploatowane w MPK S.A. w Krakowie. Ze względu na brak dostępnych danych, część artykułu poświęcono na wyznaczenie masowych momentów bezwładności elementów układu napędowego doświadczalną metodą drgań skrętnych struny. W kolejnych rozdziałach opisano model matematyczny i dokonano symulacji rozruchu tramwaju przy zadanych konkretnych parametrach poszczególnych składowych układu. Niektóre wyniki zaprezentowano w formie wykresów.

**Słowa kluczowe:** symulacja jazdy tramwaju, model matematyczny dynamiki, rozruch, masowe momenty bezwładności, metoda drgań skrętnych struny

## 1. Wstęp

Przedmiotem artykułu jest prezentacja symulacji działania układu napędowego tramwaju niskopodłogowego ze sprzęgłami czterocięglowymi [1, 2]. Układy napędowe tramwajów niskopodłogowych należą do najbardziej złożonych spośród układów stosowanych we współczesnych pojazdach szynowych, ponieważ powinny się one cechować:

- niską podłogą obejmującą jak największą powierzchnię ostoi pojazdu,
- małą średnicą kół ze względu na wymagania jak najniższej podłogi,
- jak najmniejszym wpływem na wzbudzenie drgań otoczenia.

W związku z takimi założeniami, układom napędowym tych pojazdów stawia się duże wymagania konstrukcyjne. Inne kryteria jak trwałość lub sprawność mogą być drugorzędne. Wymagania te wymuszają zmniejszanie rozmiarów układów napędowych i komplikują drogę przekazania napędu. W tramwajach produkowanych współcześnie, stosowane są bardzo zróżnicowane układy napędowe. Większość

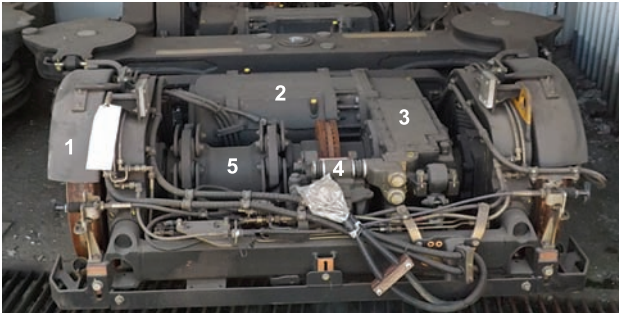
z wytwarzanych obecnie pojazdów, to tramwaje niskopodłogowe ze zróżnicowanym udziałem niskiej podłogi wewnątrz pojazdu. Najbardziej skomplikowane są układy napędowe wagonów tramwajowych całkowicie niskopodłogowych. W tym przypadku najczęściej stosuje się niekonwencjonalne układy napędowe, które jednak nie są tematem artykułu.

W niniejszym artykule dotyczącym tramwajów eksploatowanych w Krakowie (takich jak Bombardier NGT6, Bombardier NGT8, PESA KRAKOWIAK 2014N, STADLER TANGO KRAKÓW), niska podłoga stanowi około 63–80% powierzchni wnętrza pojazdu, nad wózkami napędowymi zaś zastosowano podłogę o średniej wysokości (około 550–600 mm), różniącą się od podłogi niskiej o jeden stopień schodków. Rozwiązanie to pozwoliło na zastosowanie klasycznego wózka napędowego na kołach o mniejszej średnicy, zmniejszonych rozmiarach podstawowych elementów, jak silnik, przekładnia, sprzęgła. Uzyskano także całkowite usprężynowanie silnika oraz przekładni dzięki wykorzystaniu wału drążonego i układu dwóch, szeregowo połączonych sprzęgieł czterocięglowych [3], rysunek 1. Ze względu na konstrukcję niskiej podłogi, średnice wałów i sprzęgieł powinny

<sup>1</sup> Dr hab. inż. em.; Politechnika Krakowska, Katedra Pojazdów Szynowych i Transportu; henryk.sanecki@pk.edu.pl.

<sup>2</sup> Mgr inż.; Studium Doktorńckie Politechniki Krakowskiej; tczauder@mpk.krakow.pl.

być jak najmniejsze przy zachowaniu właściwości przekazywania momentów napędowych.



Rys. 1. Układ napędowy wagonu tramwajowego NGT6 Kr:  
1) ostoja wózka napędowego, 2) elektryczny silnik trakcyjny,  
3) przekładnia, 4) wał drążony, 5) sprzęgło czterociągowe

W celu uzyskania odpowiedniego opisu matematycznego układu przedstawionego na rysunku 3 (rozdział 2), należy określić wartości masowych momentów bezwładności poszczególnych części składowych – a nie wszystkie mają kształty dogodnie do obliczeń. Elementy układu napędowego pojazdów są zazwyczaj bryłami obrotowymi o nieregularnych kształtach, często również są zbudowane z różnych substancji o różnych gęstościach. Najczęściej chodzi tu o połączenia metalowo-gumowe, jakie zastosowano w sprzęgłach czterociągowych (rys. 2).

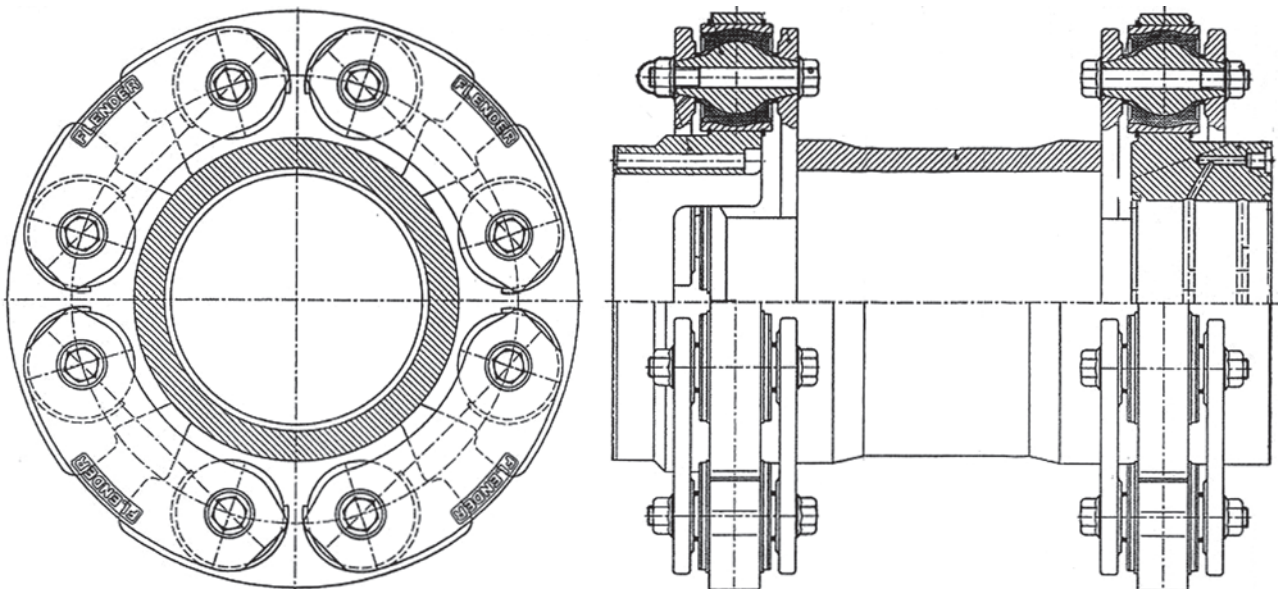
Wyznaczanie masowych momentów bezwładności dla przedmiotów o skomplikowanych kształtach

jest analitycznie bardzo trudne, a czasami wręcz niemożliwe, dlatego stosuje się inne metody, w tym doświadczalne. Jedną z metod jest wyznaczanie masowych momentów bezwładności przez analizę drgań skrętnych struny. W tym przypadku istotne jest, aby struna została zawieszona i jako przedłużenie osi geometrycznej badanego przedmiotu i jako bryła obrotowa o nieregularnych kształtach.

W celu przeprowadzenia obliczeń, najczęściej stosuje się modelowanie układów dynamicznych z zastosowaniem uproszczeń. W zależności od zakresu badań omawianego układu stosuje się różne uproszczenia. W przypadku pojazdów szynowych można rozpatrywać: cały pojazd, jeden z jego członów, wózek, oś z silnikiem i przekładnią, albo szczegółowo rozpatrywać każdy z elementów.

## 2. Ogólny model dynamiczny układu napędowego

Schemat pojedynczego układu napędowego przedstawiono na rysunku 3a. Ich liczba wynosi  $2n_w$ , gdzie  $n_w$  – liczba wózków napędowych. Układ zawiera silnik elektryczny z wirnikiem 1,6; 1,1; 1,2 połączonym z wałkiem zębatym 1,3; 1,4 przekładni zębatej za pośrednictwem sprzęgła 1,5. Przekładnia zębata składa się z kół zębatych:  $z_1, z_2, z_3, z_4$  – oznaczonych jako odpowiednio: 1,4; 2,3; 2,2; 3,2. Następnie, moment napędowy przekazywany jest do sprzęgła 5 za pośrednictwem tulei 3, na której znajdują się elementy 3,1–3,6.



Rys. 2. Sprzęgło czterociągowe FLENDER zastosowane w układzie napędowym tramwaju niskopodłogowego [1]

Tuleja 3,4 jest połączona ze środkową częścią sprzęgła 5 za pośrednictwem tarczy 3,6 i cięgieł 4 z zastosowaniem elementów elastycznych. Z drugiej strony sprzęgła znajdują się: cięgła 6, elementy elastyczne oraz tarcza 7,1, która przekazuje moment napędowy na oś 7,2 oraz na koła jezdne 7,3 i 7,4.

Ze względu na dużą liczbę elementów składowych analizowanego układu, uzyskanie realnego rozwiązania dla jego dynamiki jest bardzo utrudnione. Powstaje zatem konieczność zastosowania pewnych uproszczeń. Na rysunku 3b przedstawiono schemat zredukowanego modelu układu napędowego składającego się z następujących mas: L – lewa strona względem sprzęgła, P – prawa strona względem sprzęgła, S – środkowa część sprzęgła, CL – cięgła lewostronne sprzęgła, CP – cięgła prawostronne sprzęgła. Po obu stronach sprzęgła znajdują się elementy podatne ze sztywnościami  $k_L$  i  $k_P$  oraz ze współczynnikami tłumienia  $h_L$  i  $h_P$ .

W opisywanym układzie parametry jego rzeczywistych elementów składowych, jak na rysunku 3a, należy zastąpić odpowiednimi parametrami elementów modelu zastępczego (rys. 3b). Zredukowany moment bezwładności  $J_P$  można wyznaczyć przez porównanie energii kinetycznej masy zredukowanej P z sumaryczną energią kinetyczną elementów składowych zastąpionych tą masą, czyli:

$$\frac{1}{2} J_P \dot{\phi}_P^2 = \frac{1}{2} J_1 \eta_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \eta_2 \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\phi}_P^2, \quad (1)$$

gdzie: indeksy 1, 2, 3 oznaczają numery wałów (rys. 3a), a  $\eta_1$  – to sprawność jednej pary kół zębatych. Po przekształceniach otrzymano wzór:

$$J_P = J_1 \eta_1^2 \left( z_2 / z_1 \right)^2 \left( z_4 / z_3 \right)^2 + J_2 \eta_1 \left( z_4 / z_3 \right)^2 + J_3. \quad (2)$$

Analogicznie postępuje się z momentem bezwładności  $J_L$ . Energia kinetyczna masy zredukowanej musi odpowiadać energii kinetycznej elementów składowych zastąpionych tą masą, czyli:

$$\frac{1}{2} J_L \dot{\phi}_L^2 \cdot n_{\text{nap}} = \frac{1}{2} J_7 \dot{\phi}_L^2 \cdot 2n_w + \frac{1}{2} m_{\text{tram}} v^2, \quad (3)$$

gdzie:

$m_{\text{tram}} = m_1 + n_{\text{wn}} m_{2n} + n_{\text{wt}} m_{2t} + m_3$  – całkowita masa tramwaju,

$m_1$  – masa własna tramwaju bez wózków,

$m_{2n}$  – masa 1 wózka napędowego,

$m_{2t}$  – masa 1 wózka tocznego,

$n_w = n_{\text{wn}} + n_{\text{wt}}$  – liczba wózków w tramwaju,

$n_{\text{wn}}$  – liczba wózków napędowych,

$n_{\text{wt}}$  – liczba wózków tocznych,

$n_{\text{nap}}$  – liczba napędów (w badanym tramwaju wynosi ona  $2n_{\text{wn}}$ ),

$m_3$  – masa pasażerów,

$D$  – średnica koła jezdnego,

$v$  – prędkość jazdy tramwaju,

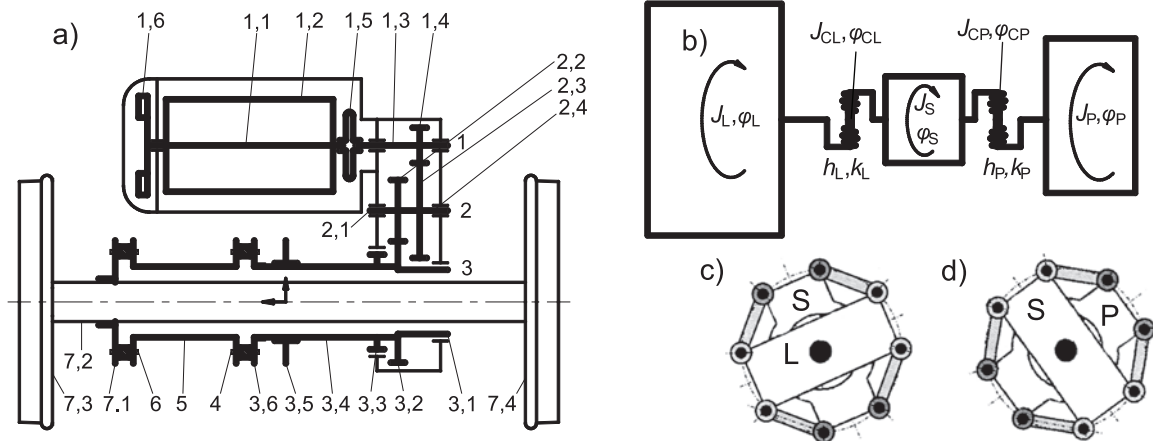
$$v = \dot{\phi}_L D / 2. \quad (4)$$

Po podstawieniu wzoru (4) do (3) i po przekształceniach otrzymuje się wzór na zredukowany moment bezwładności  $J_L$ :

$$J_L = \left[ J_7 \cdot 2n_w + m_{\text{tram}} (D/2)^2 \right] \frac{1}{n_{\text{nap}}}. \quad (5)$$

Pozostałe masowe momenty bezwładności modelu zastępczego mogą być zdefiniowane jako:

$$J_{CP} = J_4, J_S = J_5, J_{CL} = J_6. \quad (6)$$



Rys. 3. a) Schemat pojedynczego układu napędowego w wózku; koła zębate:  $z_1, z_2, z_3, z_4$  – oznaczono jako odpowiednio: 1,4; 2,3; 2,2; 3,2; b) model zastępczy układu napędowego tramwaju; c) połączenie masy zastępczej L ze środkiem sprzęgła – wałem pośrednim; d) połączenie środka sprzęgła (wału pośredniego) z masą zastępczą P [opracowanie własne]

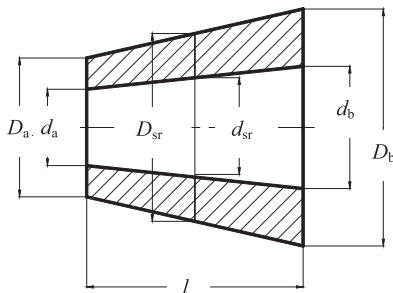
### 3. Analityczne wyznaczanie masowych momentów bezwładności

Niektóre elementy analizowanego układu napędowego (wałki, koła, tarcze) mają proste kształty, które ogólnie można sprowadzić do stożka ściętego z otworem również stożkowym, rysunek 4. Ten obiekt można opisać następującym wzorem na objętość:

$$V = \frac{\pi l}{12} \left( \frac{D_b^3 - D_a^3}{D_b - D_a} - \frac{d_b^3 - d_a^3}{d_b - d_a} \right), \quad (7)$$

lub

$$V = \frac{\pi l}{12} (4D_{sr}^2 - D_a D_b - 4d_{sr}^2 + d_a d_b). \quad (8)$$



Rys. 4. Wymiary stożka ściętego z otworem [opracowanie własne]

Wzór na masowy moment bezwładności ma postać:

$$J = \frac{\pi \rho l}{160} \left( \frac{D_b^5 - D_a^5}{D_b - D_a} - \frac{d_b^5 - d_a^5}{d_b - d_a} \right), \quad (9)$$

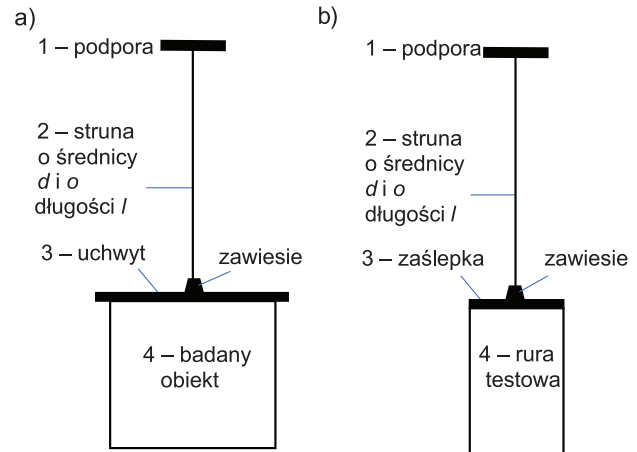
gdzie, w celu umożliwienia obliczeń dla  $D_b = D_a$  i/lub  $d_b = d_a$ , można wykorzystać wzory:

$$\begin{aligned} \frac{D_b^5 - D_a^5}{D_b - D_a} &= (D_b - D_a)^4 + 5D_b D_a (D_b^2 - D_b D_a + D_a^2) \\ \frac{d_b^5 - d_a^5}{d_b - d_a} &= (d_b - d_a)^4 + 5d_b d_a (d_b^2 - d_b d_a + d_a^2). \end{aligned} \quad (10)$$

### 4. Doświadczalne wyznaczanie masowych momentów bezwładności

Masowy moment bezwładności można wyznaczyć metodą zawieszenia jednostrunowego. Urządzenie pomiarowe składa się z podpory 1, struny 2, uchwytu 3 i elementu badanego 4 (rys. 5a). Element badany mocuje się w uchwycie tak, aby jego główna oś pokrywała się z osią struny. Badany element zawieszony

na strunie stanowi układ drgający realizujący drgania skrętne.



Rys. 5. Schemat stanowiska do badań metodą struny (a), stanowisko do wykonania testu wstępnego (b) [opracowanie własne]

#### 4.1. Dobór wymiarów struny

Do wykonania eksperymentu należy użyć stalowego drutu, np. struny od jakiegoś instrumentu muzycznego szarpanego (np. gitary elektrycznej). Struna o średnicy  $d$  obciążona jest ciężarem  $Q$  badanego elementu wraz z uchwytem, który wywołuje naprężenia rozciągające  $\sigma = \frac{Q}{A}$  oraz momentem skręcającym  $M$  wywołującym naprężenia skręcające  $\tau = \frac{M}{W_o}$ . Musi być spełniony następujący warunek wytrzymałościowy:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{Q}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M}{W_o}\right)^2} \leq \frac{R_m}{S}, \quad (11)$$

gdzie:

$$A = \frac{\pi d^2}{4}, \quad W_o = \frac{2J_o}{d} = \frac{\pi d^3}{16},$$

$R_m$  – wytrzymałość materiału struny na rozciąganie,

$S$  – współczynnik bezpieczeństwa.

Dla zadanego (maksymalnego) kąta  $\varphi$  moment skręcający strunę wynosi:

$$M = \frac{\varphi G J_o}{l} = \frac{\varphi G W_o d}{2l}, \quad (12)$$

gdzie:

$l$  – odległość pomiędzy punktami mocowania struny,  
 $G$  – moduł Kirchhoffa; moduł odkształcalności postaciowej.

Teraz warunek wytrzymałościowy przyjmuje postać:

$$\sqrt{\left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 + 3\left(\frac{\varphi G W_0 d}{2l}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 + 3\left(\frac{\varphi G d}{2l}\right)^2} \leq \frac{R_m}{S}, \quad (13)$$

lub

$$3\left(\frac{\varphi G}{2l}\right)^2 d^6 - \left(\frac{R_m}{S}\right)^2 d^4 + \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 \leq 0. \quad (14)$$

Podstawiając:

$$x = d^2 \text{ oraz } \alpha = 3\left(\frac{\varphi G}{2l}\right)^2, \beta = -\left(\frac{R_m}{S}\right)^2, \delta = \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2, \quad (15)$$

otrzymuje się równanie algebraiczne 3-go stopnia o postaci:

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \delta = 0. \quad (16)$$

Równanie (16) na  $x$  oraz  $d$  można rozwiązać numerycznie. Wymaganą średnicę  $d = 0,85$  mm (przyjęto 1,2 mm) otrzymano po obliczeniach dla danych:  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0,3$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $R_m = 1600$  MPa oraz dla  $Q = 304$  N,  $l = 750$  mm,  $\varphi = 5^\circ$  i dla współczynnika bezpieczeństwa  $S = 3$ .

## 4.2. Teoretyczne podstawy badań

Przed zrealizowaniem właściwych badań należy wykonać pewne czynności wstępne. Strunę o średnicy  $d$  należy zamocować względem punktu zawieszenia tak, aby jej górny koniec nie ulegał obrotowi ani innym przemieszczeniom (punkt ten powinien być sztywno utwierdzony). Następnie należy wykonać test próbny dla obiektu badań w postaci zaślepionej rury o masie  $m_r$ , o średnicy  $D_r$  i o grubości ścianki  $s_r$  wraz z zawiesiem, obracając rurę o kąt  $\varphi = 5^\circ$  i mierząc okres drgań wstępnych  $T_w$ , rysunek 5b. Dzięki temu można obliczyć moment bezwładności  $J_w$ :

$$J_w = \frac{GT_w^2 J_o}{4\pi^2 l}, \quad (17)$$

gdzie:  $J_o = \frac{\pi d^4}{32}$ .

Z drugiej strony moment bezwładności dla próby wstępnej można wyznaczyć teoretycznie. Uwzględniając

okrągłą tarczę (zaślepiającą rurę) o masie  $m_r$ , o średnicy  $D_r$  i zawiesie ( $J_z$ ) moment  $J_{wt}$  opisuje wzór:

$$J_{wt} = \frac{1}{8} m_r \left[ D_r^2 + (D_r - 2s_r)^2 \right] + \frac{1}{8} m_r D_r^2 + J_z, \quad (18)$$

co pozwala na obliczenie okresu  $T_{wt}$  i ocenę błędu

$$\frac{T_w - T_{wt}}{T_w}:$$

$$T_{wt} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{wt}}{GJ_o}} \quad (19)$$

Ustalono, że  $T_w = 3,2$  s z błędem 7,6% a moment bezwładności  $J_w = 5687$  kg·mm<sup>2</sup>.

W celu przeprowadzenia właściwych badań na dolnym końcu struny należy zawiesić tarczę (uchwyt 3 z zawiesiem) służącą do mocowania testowanych obiektów, rysunek 5a. Koniec struny musi znajdować się w środku ciężkości tarczy, aby zajmowała ona pozycję poziomą. Do tarczy należy przymocować kolejne badane obiekty i wyznaczyć odpowiadające im okresy wahań skłonnych  $T_i$ . Na tej podstawie można wyznaczyć masowe momenty bezwładności badanych  $i$ -tych obiektów według wzoru:

$$J_i = \frac{T_i^2 GJ_o}{4\pi^2 l} - J_u, \quad (20)$$

gdzie:  $J_u$  jest masowym momentem bezwładności uchwytu (tarczy), który można obliczyć według wzoru (21):

$$J_u = \frac{1}{12} m_u \left[ A_u^2 + B_u^2 \right], \quad (21)$$

gdzie:

$m_u$  – masa uchwytu,

$A_u, B_u$  – wymiary prostokątnej tarczy (uchwytu).

## 4.3. Przebieg testów

Praktyczne wyznaczenie masowych momentów bezwładności nie było łatwe. Na początku problemem była dostępność elementów układu napędowego. Można było w tym celu użyć elementów fabrycznie nowych bądź zdemontowanych podczas okresowych napraw. Wykorzystano jednak fabrycznie nowy wał pośredni oraz fabrycznie nową tarczę zabieraka, która w warunkach eksploatacji jest wtłoczona na wał osiowy. Dodatkowo wykonano także badanie tarczy zabieraka z elementu odkręconego od wału pierwszego, czyli wału wyjściowego od strony przekładni. Wszystkie elementy zważono na wadze elektronicznej.

Następną czynnością było dobranie właściwej struny oraz znalezienie miejsca na stanowisko badawcze.

W tym celu wybrano kratownicowe schody do pomostu służącego do napraw elementów znajdujących się na dachu pojazdów szynowych. W celu zawieszenia struny wykonano płytę z blachy stalowej i wywiercono w niej 5 otworów: 4 na śruby przechodzące przez rzeczywiste otwory w tulejach metalowo-gumowych badanego sprzęgła i jeden w środku do wkręcenia śruby z wlutowaną struną badawczą. Śruba została przewiercona wzdłuż osi geometrycznej i w to miejsce wprowadzono strunę za pomocą twar dolutowanego złącza.

Do wyznaczenia masowego momentu bezwładności wału pośredniego, czyli wału wyjściowego od strony przekładni, konieczne okazało się wykonanie 3 prób (z przyczyn organizacyjnych w znacznych odstępach czasu), aby osiągnąć wyniki nadające się do analizy.

Pierwotnie wybrano najgrubszą, dostępną strunę gitarową z opłotem miedzianym. Miedziany opłot spowodował, że obroty wału pośredniego znacznie przekraczały 90 stopni w każdą stronę i nie ulegały tłumieniu. Prawdopodobnie ujawniła się energia potencjalna sprężystości opłotu.

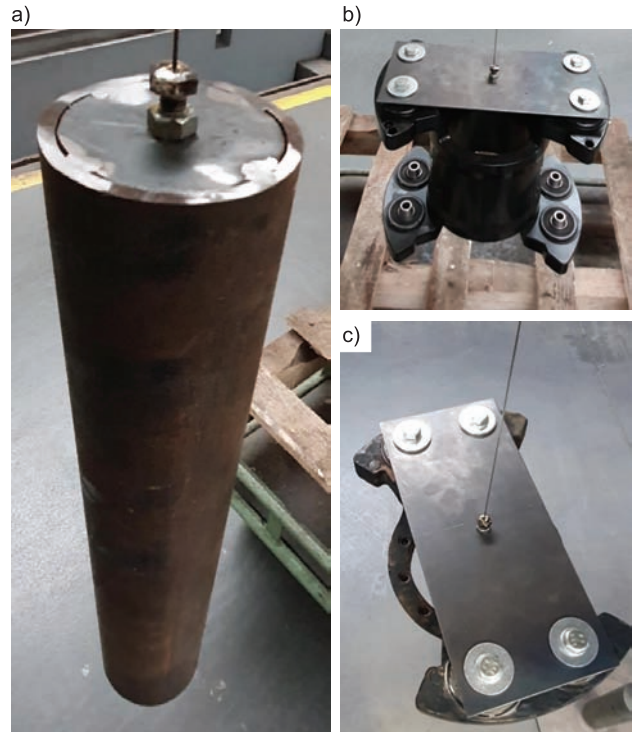
W drugiej próbie wykorzystano najgrubszy z dostępnych cienkich drutów do strun fortepianowych o średnicy 0,56 mm. Badania wzorcowej rury przebiegły zasadniczo poprawnie za wyjątkiem niepożądanych efektów wahadła, natomiast w przypadku wału po pierwszym pełnym obrocie nastąpiło zerwanie drutu.

Dopiero trzecia próba przyniosła oczekiwane efekty (rys. 6) oprócz tego, że nie udało się całkowicie wyeliminować zjawiska drgań wahadła, w szczególności w przypadku rury próbnej. W trzecim zestawie badań użyto drutu stalowego (fortepianowego) o średnicy 1,2 mm i udało się prawidłowo zbadać wszystkie 3 elementy sprzęgła. Zaobserwowane okresy drgań wzrosły proporcjonalnie do kwadratu średnicy drutu.

Podstawowymi ograniczeniami dokładności jest ocena wizualna z dokładnością pomiaru na filmie do 1 sekundy. Zwiększanie dokładności skali czasu nie było zasadne, ponieważ wizualnie trudno było precyzyjnie określić chwilę zwrotu ruchu obrotowego badanego przedmiotu. Okres drgań został wyznaczony jako średni, z dłuższego przedziału czasu obserwacji, po wyeliminowaniu pierwszego mniej precyzyjnego ruchu. Z przyczyn organizacyjnych skrócono pomiar do około 3 minut, co oznacza kilkanaście obrotów. Innymi zakłóceniami były drgania pozostałych maszyn działających wewnątrz hali, a także drgania powstałe od samej czynności zawieszenia przedmiotu czy wprawienia go w ruch obrotowy. Samo zawieszanie przedmiotu to ruch nieokreślony, wprawianie go w obrót – również, stąd z obliczeń pominięto pierwsze 2, 3 obroty.

Dokonano wizualnej oceny zarejestrowanego nagrania cyfrowego, przy czym dokładność pomiaru czasu wynosiła 1 s. W przypadku rury próbnej zaobserwowano 15 drgań skrętnych trwających 48 s, co

daje średnio 3,2 s. W przypadku największego badanego elementu było to 5 cykli na 142 s, co daje średnio 28,4 s. W pozostałych 2 przypadkach zaobserwowano 8 cykli na 204 s, co daje średnio 20,5 s oraz 5 cykli na 114 s, czyli 19,8 s.



Rys. 6. Doświadczalne wyznaczenie masowego momentu bezwładności: a) dla rury badawczej, b) środkowej części sprzęgła, c) dla tarczy zabierakowej sprzęgła od strony wału napędowego wychodzącego od przekładni [fot. T. Czauderna]

Dodatkowym wskazaniem dokładności badań jest porównanie masowego momentu bezwładności wyznaczonego analitycznie i doświadczalnie dla badanej rury wzorcowej.

## 5. Model dynamiczny

Rozwiązania dla różnych układów napędowych można znaleźć w wielu publikacjach, np. w [4, 5, 6]. Pracę układu napędowego przedstawionego na rysunku 3b opisują następujące równania różniczkowe:

$$J_L \ddot{\varphi}_L = h_L (\dot{\varphi}_{CL} - \dot{\varphi}_L) + k_L (\varphi_{CL} - \varphi_L) - M_L (\dot{\varphi}_L), \quad (22)$$

$$J_{CL} \ddot{\varphi}_{CL} = -h_L (\dot{\varphi}_{CL} - \dot{\varphi}_L) - k_L (\varphi_{CL} - \varphi_L) - + h_L (\dot{\varphi}_{CL} - \dot{\varphi}_S) - k_L (\varphi_{CL} - \varphi_S), \quad (23)$$

$$J_S \ddot{\varphi}_S = h_L (\dot{\varphi}_{CL} - \dot{\varphi}_S) + k_L (\varphi_{CL} - \varphi_S) + + h_P (\dot{\varphi}_{CP} - \dot{\varphi}_S) + k_P (\varphi_{CP} - \varphi_S), \quad (24)$$

$$J_{CP}\ddot{\varphi}_{CP} = -h_p(\dot{\varphi}_{CP} - \dot{\varphi}_p) - k_p(\varphi_{CP} - \varphi_p) - h_p(\dot{\varphi}_{CP} - \dot{\varphi}_s) - k_p(\varphi_{CP} - \varphi_s), \quad (25)$$

$$J_p\ddot{\varphi}_p = h_p(\dot{\varphi}_{CP} - \dot{\varphi}_p) + k_p(\varphi_{CP} - \varphi_p) + M_p(\dot{\varphi}_p), \quad (26)$$

gdzie:

$M_L(\dot{\varphi}_L)$  oznacza zredukowany moment wywołany siłami oporu jazdy tramwaju,

$M_p(\dot{\varphi}_p)$  oznacza zredukowany moment napędowy pochodzący od silnika elektrycznego.

Moment oporowy opisuje wzór (27):

$$M_L(\dot{\varphi}_L) = F_{op}(v) \frac{D}{2} = F_{op} \left( \frac{D}{2} \dot{\varphi}_L \right) \frac{D}{2}, \quad (27)$$

gdzie:

$v$  – prędkość jazdy tramwaju w km/h (maksymalnie 80 km/h), wzór (4),

$F_{op}(v)$  – siła oporu podczas jazdy tramwaju, która określana jest na różne sposoby, co opisano np. w [6]. Na rysunku 7 przedstawiono przykładowe wykresy tej funkcji według różnych autorów.

Do dalszych analiz przyjęto wzór Davisa w postaci:

$$F_{op}(v) = a + bv^2 \quad [\text{kN}], \quad (28)$$

gdzie:

$$a = \left( 3,58 + \frac{14,2}{m_{osi}} \right) \cdot \frac{g \cdot m_{tram}}{1000},$$

$$b = 0,045 \cdot 0,151 \cdot \frac{S_{czoł}}{m_{osi} n_{wag}} \cdot \frac{g \cdot m_{tram}}{1000}, \quad (29)$$

$v$  – w km/h,  $n_{wag} = 3$  – liczba członów (wagonów) tramwaju,

$S_{czoł} = 5,52 \text{ m}^2$  – pole powierzchni czoła tramwaju,  $g \cdot m_{tram} = 457,6 \text{ kN}$  – ciężar tramwaju,

$m_{osi} = \frac{m_{tram}}{2n_w} = 7780 \text{ kg}$  – masa tramwaju przypadająca na jedną oś,

$n_w = 3$  – liczba wózków ( $n_w = n_{wn} + n_{wt} = 2+1$ ).

Znając charakterystykę silnika  $M_s(\omega_s)$ , gdzie  $\omega_s = \dot{\varphi}_p u$  można wyznaczyć zredukowany moment napędowy według wzoru:

$$M_p(\dot{\varphi}_p) = M_s(\dot{\varphi}_p u) \eta_1^2 u, \quad (30)$$

gdzie:

$u = (z_2/z_1) \cdot (z_4/z_3) = 5,0556$ ,  $\eta_1 = 0,99$ ,

$M_s(\dot{\varphi}_p u)$  – moment napędowy silnika w funkcji prędkości kątowej wału silnika  $\omega_s = \dot{\varphi}_p u$ .

W celu wyznaczenia charakterystyki  $M_s(n)$  zastosowanego silnika asynchronicznego można wykorzystać poniższe dane, zgodnie z [1]:

$N_n = 125 \text{ kW}$  (nominalna moc silnika;  $N_n = M_n \pi n_n / 30$ ),

$M_n = 675 \text{ Nm}$  (nominalny moment obrotowy silnika),

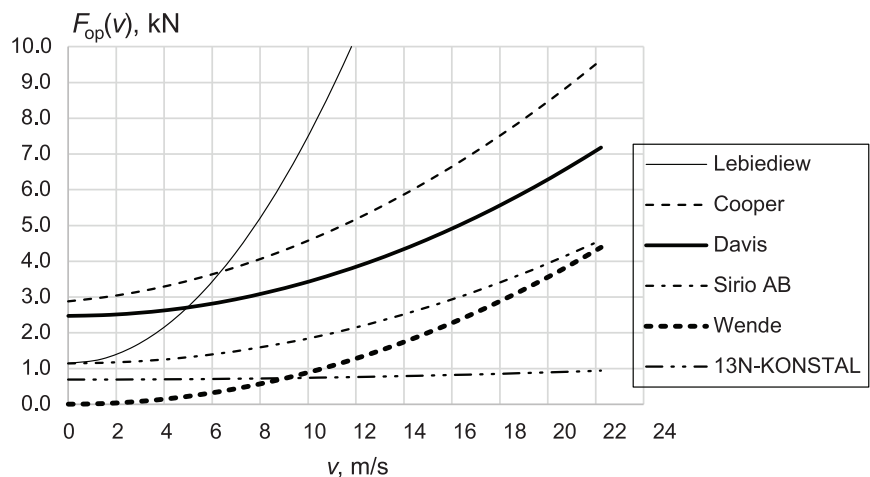
$n_n = 1770 \text{ 1/min}$  (prędkość obrotowa odpowiadająca nominalnemu momentowi silnika),

$M_k = 880 \text{ Nm}$  (krytyczny moment obrotowy silnika),

$n_o = 4250 \text{ 1/min}$  (maksymalna prędkość obrotowa silnika).

Charakterystyka  $M_s(n)$  może być wyznaczona po zastosowaniu tzw. wzoru Klossa:

$$M_s(n) = \frac{2s s_k k M_n}{s^2 + s_k^2}, \quad (31)$$



Rys. 7. Wykresy funkcji  $F_{op}(v)$  dla tramwajów według różnych autorów [6, 7]

gdzie:

$$k = \frac{M_k}{M_n}, \quad (32)$$

$s$ ,  $s_k$  – poślizg i poślizg krytyczny zdefiniowane jako:

$$s = 1 - \frac{n}{n_o}, \quad s_k = 1 - \frac{n_k}{n_o}. \quad (33)$$

Podstawiając do wzoru (29):  $M_s(n_n) = M_n$  oraz  $s = s_n = 1 - \frac{n_n}{n_o}$  otrzymuje się następujący wzór na poślizg krytyczny:

$$s_k = s_n \left( k \pm \sqrt{k^2 - 1} \right). \quad (34)$$

Na rysunku 8 przedstawiono wykres funkcji  $M_s(n)$  z zaznaczonymi charakterystycznymi wielkościami takimi, jak  $M_r$  – moment rozruchowy,  $M_n$ ,  $n_n$ ,  $M_k$ ,  $n_k$  i  $n_o$ .

W celu rozwiązania układu równań (22)–(26) można wykorzystać metodę Runge-Kutty, która wymaga zastosowania następujących nowych zmiennych:

$$\begin{aligned} y_0 &= \varphi_P, \quad y_1 = \dot{y}_0; \quad y_2 = \varphi_{CP}, \quad y_3 = \dot{y}_2; \\ y_4 &= \varphi_S, \quad y_5 = \dot{y}_4; \quad y_6 = \varphi_{CL}, \quad y_7 = \dot{y}_6; \\ y_8 &= \varphi_L, \quad y_9 = \dot{y}_8. \end{aligned} \quad (35)$$

Oprócz danych podanych w poprzednich rozdziałach, do analiz przyjęto następujące wielkości:

$m_1 = 20100$  kg – masa własna tramwaju bez wózków,  
 $m_{2n} = 4125$  kg – masa 1 wózka napędowego,  
 $m_{2t} = 2650$  kg – masa 1 wózka tocznego,  
 $n_{wn} = 2$  – liczba wózków napędowych,  
 $n_{wt} = 1$  – liczba wózków tocznych,  
 $m_3 = 15650$  kg – masa pasażerów,

$m_{\text{tram}} = m_1 + n_{wn}m_{2n} + n_{wt}m_{2t} + m_3 = 46650$  kg – maksymalna masa tramwaju,

$n_{\text{nap}} = 2n_{wn} = 4$  – liczba napędów,

$D = 600$  mm – średnica nowego koła jezdneho (wartość minimalna = 510 mm),

$v = 80$  km/h – maksymalna prędkość jazdy tramwaju,

$k_{11} = 1,6648$  kN/mm – sztywność promieniowa jednego przegubu w sprzęgle, według [3],

$R = 136$  mm – promień okręgu rozmieszczenia osi przegubów w sprzęgle,

$h_{11}$  – współczynnik tłumienia jednego przegubu w sprzęgle (w temp. około 20°C), zgodnie z [8]:

$$\begin{aligned} h_{11} &= (18 \div 42) \left[ \text{LB} \cdot \frac{\text{sec}}{\text{inch}} \right] = \\ &= (18 \div 42) \left[ 4,5 \text{ N} \cdot \frac{\text{sec}}{25,4 \text{ mm}} \right] = \\ &= (3,2 \div 7,4) \text{ [Ns/mm]}, \end{aligned}$$

$J_7 = 19,874$  kg·m<sup>2</sup> – masowy moment bezwładności zestawu osiowego,

$J_L$  – zredukowany masowy moment bezwładności od strony kół jezdnych, według wzoru (5):

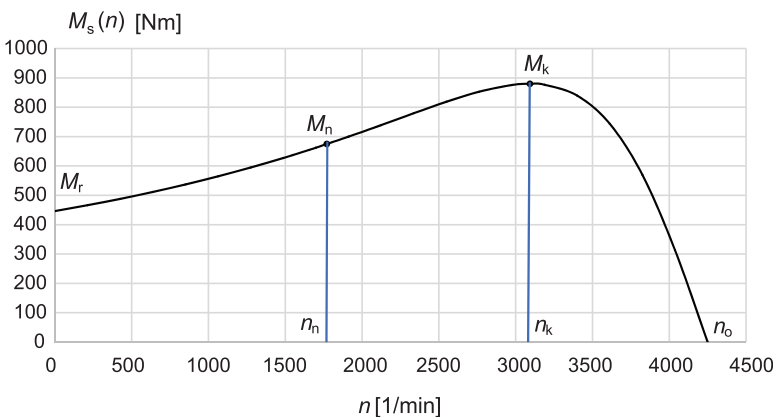
$$\begin{aligned} J_L &= \left[ J_7 \cdot 2n_w + m_{\text{tram}} \left( \frac{D}{2} \right)^2 \right] \frac{1}{n_{\text{nap}}} = \\ &= \left[ 18,64 \cdot 2 \cdot 3 + 46650 \cdot \left( \frac{0,6}{2} \right)^2 \right] \frac{1}{4} = , \\ &= 1079,44 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$J_{CL} = 0,195$  kg·m<sup>2</sup> – masowy moment bezwładności układu cięgieł z lewej strony sprzęgła,

$J_S = 0,285$  kg·m<sup>2</sup> – masowy moment bezwładności środkowej części sprzęgła,

$J_{CP} = 0,195$  kg·m<sup>2</sup> – masowy moment bezwładności układu cięgieł z prawej strony sprzęgła,

$J_P = 24,914$  kg·m<sup>2</sup> – zredukowany masowy moment bezwładności od strony silnika,



Rys. 8. Charakterystyka silnika – wykres funkcji  $M_s(n)$  [opracowanie własne]



$k_L = k_P = 4k_{11}R^2 = 4 \cdot 1664,8 \cdot 136^2 = 123,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$  –  
sztywność obrotowa układu cięgieł,  
 $h_L = h_P = 4h_{11}R^2 = 4 \cdot (3,2 \div 7,4) \cdot 136^2 = (237 \div 547) \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{mm}$   
– współczynnik tłumienia układu cięgieł.

W celu uzyskania bezwymiarowości zapisu zastosujemy podstawienie

$$x = t/t_1, \quad (36)$$

gdzie:  $t$  – czas w s,  $t_1$  – wielkość pomocnicza (równa 1s).  
Dzięki temu zaistniały następujące związki:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_Z &= \frac{d\varphi_Z}{dt} = \frac{d\varphi_Z}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \varphi'_Z \cdot \frac{1}{t_1}, \\ \ddot{\varphi}_Z &= \frac{d^2\varphi_Z}{dt^2} = \frac{d}{dx} \left( \varphi'_Z \cdot \frac{1}{t_1} \right) \cdot \frac{1}{t_1} = \varphi''_Z \cdot \frac{1}{t_1^2}, \end{aligned} \quad (37)$$

gdzie:  $\varphi_Z$  oznacza ogólnie:  $\varphi_P$ ,  $\varphi_{CP}$ ,  $\varphi_S$ ,  $\varphi_{CL}$ , lub  $\varphi_L$ .

Po obustronnym podzieleniu równań (22)–(26) przez  $k = k_L = k_P$  i po uwzględnieniu zależności  $h = h_L = h_P$  przyjmą one postać:

$$\frac{J_L}{kt_1^2} \varphi''_L = \frac{h}{kt_1} (\varphi'_{CL} - \varphi'_L) + (\varphi_{CL} - \varphi_L) - \frac{M_L (\varphi'_L / t_1)}{k}, \quad (38)$$

$$\frac{J_{CL}}{kt_1^2} \varphi''_{CL} = -\frac{h}{kt_1} (2\varphi'_{CL} - \varphi'_L - \varphi'_S) - (2\varphi_{CL} - \varphi_L - \varphi_S), \quad (39)$$

$$\frac{J_S}{kt_1^2} \varphi''_S = \frac{h}{kt_1} (\varphi'_{CL} + \varphi'_{CP} - 2\varphi'_S) + (\varphi_{CL} + \varphi_{CP} - 2\varphi_S), \quad (40)$$

$$\frac{J_{CP}}{kt_1^2} \varphi''_{CP} = -\frac{h}{kt_1} (2\varphi'_{CP} - \varphi'_P - \varphi'_S) - (2\varphi_{CP} - \varphi_P - \varphi_S), \quad (41)$$

$$\frac{J_P}{kt_1^2} \varphi''_P = \frac{h}{kt_1} (\varphi'_{CP} - \varphi'_P) + (\varphi_{CP} - \varphi_P) + \frac{M_P (\varphi'_P / t_1)}{k}. \quad (42)$$

Biorąc pod uwagę symetrię sprzęgła, zachodzi równość:  $J_{CL} = J_{CP}$ . Podstawiając do równań (39) i (41) tzw. mały parametr  $\varepsilon$  zdefiniowany jako:

$$\varepsilon = \frac{J_{CL}}{kt_1^2} = \frac{J_{CP}}{kt_1^2} = \frac{0,195}{123,2 \cdot 1} \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2} \right] \approx 1,583 \cdot 10^{-6} \ll 1 \quad (43)$$

równania przyjmują postać:

$$\varepsilon \varphi''_{CL} = -\frac{h}{kt_1} (2\varphi'_{CL} - \varphi'_L - \varphi'_S) - (2\varphi_{CL} - \varphi_L - \varphi_S), \quad (44)$$

$$\varepsilon \varphi''_{CP} = -\frac{h}{kt_1} (2\varphi'_{CP} - \varphi'_P - \varphi'_S) - (2\varphi_{CP} - \varphi_P - \varphi_S). \quad (45)$$

Wszystkie zmienne funkcje oznaczone ogólnie jako  $\varphi_Z$  zostają rozwinięte w szeregi potęgowe wokół małego parametru  $\varepsilon$ :

$$\varphi_Z = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \varphi_{Zi}. \quad (46)$$

Po zastosowaniu definicji (46) w równaniu (44) otrzymuje ono postać:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \varphi''_{CLi} &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \varphi''_{CL(i-1)} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left[ -\beta (2\varphi'_{CLi} - \varphi'_{Li} - \varphi'_{Si}) - (2\varphi_{CLi} - \varphi_{Li} - \varphi_{Si}) \right], \end{aligned} \quad (47)$$

gdzie podstawiono:

$$\beta = \frac{h}{kt_1}. \quad (48)$$

Z równania (44) otrzymano następujące związki iteracyjne:

$$0 = -\beta (2\varphi'_{CL0} - \varphi'_{L0} - \varphi'_{S0}) - (2\varphi_{CL0} - \varphi_{L0} - \varphi_{S0}), \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \varphi''_{CL(i-1)} &= -\beta (2\varphi'_{CLi} - \varphi'_{Li} - \varphi'_{Si}) - (2\varphi_{CLi} - \varphi_{Li} - \varphi_{Si}) \\ &\text{dla } i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (50)$$

a po analogicznych zabiegach dotyczących równania (45) – związki:

$$0 = -\beta (2\varphi'_{CP0} - \varphi'_{P0} - \varphi'_{S0}) - (2\varphi_{CP0} - \varphi_{P0} - \varphi_{S0}), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \varphi''_{CP(i-1)} &= -\beta (2\varphi'_{CPi} - \varphi'_{Pi} - \varphi'_{Si}) - (2\varphi_{CPi} - \varphi_{Pi} - \varphi_{Si}) \\ &\text{dla } i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (52)$$

Biorąc pod uwagę zerowe przybliżenia (49) i (51) można wyeliminować zmienne  $\varphi_{CL0}$  i  $\varphi_{CP0}$ , zatem równania (42), (40) i (38) – przyjmują postać:

$$\varepsilon_P \varphi''_{P0} = \frac{\beta}{2} (\varphi'_{S0} - \varphi'_{P0}) + \frac{1}{2} (\varphi_{S0} - \varphi_{P0}) + \frac{M_P (\varphi'_{P0} / t_1)}{k}, \quad (53)$$

$$\varepsilon_S \varphi''_{S0} = \frac{\beta}{2} (\varphi'_{L0} + \varphi'_{P0} - 2\varphi'_{S0}) + \frac{1}{2} (\varphi_{L0} + \varphi_{P0} - 2\varphi_{S0}), \quad (54)$$

$$\varepsilon_L \varphi_{L0}'' = \frac{\beta}{2} (\varphi'_{S0} - \varphi'_{L0}) + \frac{1}{2} (\varphi_{S0} - \varphi_{L0}) - \frac{M_L(\varphi'_{L0}/t_1)}{k}, \quad (55)$$

gdzie podstawiono:

$$\varepsilon_L = \frac{J_L}{kt_1^2}, \quad \varepsilon_S = \frac{J_S}{kt_1^2}, \quad \varepsilon_P = \frac{J_P}{kt_1^2}. \quad (56)$$

W celu rozwiązania układu równań (53)–(55) metodą Runge-Kutty należy zastosować następujące nowe zmienne (z pominięciem indeksu  $i$ ):

$$\begin{aligned} y_0 &= \varphi_P, \quad y_1 = y', \quad y_2 = \varphi_S, \quad y_3 = y'_2, \\ y_4 &= \varphi_L, \quad y_5 = y'_4. \end{aligned} \quad (57)$$

Równania (53), (54) i (55) przyjmują postać:

$$y'_1 = \frac{\beta}{2\varepsilon_P} (y_3 - y_1) + \frac{1}{2\varepsilon_P} (y_2 - y_0) + \frac{1}{k\varepsilon_P} M_P(y_1/t_1), \quad (58)$$

$$y'_3 = \frac{\beta}{2\varepsilon_S} (y_5 + y_1 - 2y_3) + \frac{1}{2\varepsilon_S} (y_4 + y_0 - 2y_2), \quad (59)$$

$$y'_5 = \frac{\beta}{2\varepsilon_L} (y_3 - y_5) + \frac{1}{2\varepsilon_L} (y_2 - y_4) - \frac{1}{k\varepsilon_L} M_L(y_5/t_1). \quad (60)$$

W celu uzyskania następnego (1-szego) przybliżenia daje się zauważyć, że równania (49) i (51) można zapisać jako:

$$\left[ \ln(2\varphi_{CL0} - \varphi_{L0} - \varphi_{S0}) \right]' = -\frac{1}{\beta}, \quad (61)$$

$$\left[ \ln(2\varphi_{CP0} - \varphi_{P0} - \varphi_{S0}) \right]' = -\frac{1}{\beta}, \quad (62)$$

lub

$$2\varphi_{CL0} - \varphi_{L0} - \varphi_{S0} = C_1 e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad (63)$$

$$2\varphi_{CP0} - \varphi_{P0} - \varphi_{S0} = C_2 e^{-\frac{x}{\beta}}. \quad (64)$$

Zakładając zerowe warunki początkowe dla kątów:  $\varphi_{CL0}$ ,  $\varphi_{L0}$ ,  $\varphi_{CP0}$ ,  $\varphi_{P0}$ ,  $\varphi_{S0}$  (dla  $x = 0$ ) otrzymuje się  $C_1 = C_2 = 0$  i wzory:

$$\varphi_{CL0}'' = \frac{\varphi_{L0}'' + \varphi_{S0}''}{2}, \quad (65)$$

$$\varphi_{CP0}'' = \frac{\varphi_{P0}'' + \varphi_{S0}''}{2}, \quad (66)$$

które określają lewe strony równań (50) i (52) a mianowicie (dla  $i = 1$ ):

$$\varphi_{CL0}'' = -\beta(2\varphi'_{CL1} - \varphi'_{L1} - \varphi'_{S1}) - (2\varphi_{CL1} - \varphi_{L1} - \varphi_{S1}), \quad (67)$$

$$\varphi_{CP0}'' = -\beta(2\varphi'_{CP1} - \varphi'_{P1} - \varphi'_{S1}) - (2\varphi_{CP1} - \varphi_{P1} - \varphi_{S1}). \quad (68)$$

W dalszym ciągu zrezygnowano z wyznaczania kolejnych przybliżeń dla rozwiązania analizowanego problemu z uwagi na trudności z rozwinięciem funkcji  $M_P(\varphi'_P/t_1)$  i  $M_L(\varphi'_L/t_1)$  w szeregi potęgowe względem małego parametru  $\varepsilon$ . Komplikacja wynika z faktu, że wymienione funkcje muszą mieć postaci podobne do prawej strony funkcji (46). W tym miejscu należy zauważyć, że uzyskanie takiego rezultatu jest możliwe, ale bardzo pracochłonne, bowiem wymaga aproksymacji funkcji  $M_P(\varphi'_P/t_1)$  i  $M_L(\varphi'_L/t_1)$  za pomocą wielomianów 5-tego i 2-giego stopnia.

Dodatkowym argumentem przemawiającym za pominięciem kolejnych iteracji jest bardzo mała wartość parametru  $\varepsilon$  – jak to wynika z wzoru (43). Umożliwia ona zaniedbanie kolejnych wyrazów rozwinięć poszczególnych funkcji.

## 6. Wyniki symulacji ruchu układu napędowego

W rozdziale 6.1. przedstawiono wyniki symulacji ruchu tramwaju: kąty obrotu i prędkości dla wcześniej przedstawionych danych (tramwaj w pełni obciążony) oraz dla przykładowego przebiegu momentu silnika  $M_{st}(\xi)$ .

### 6.1. Sterowanie momentem napędowym silnika

Podczas jazdy silnik jest sterowany w celu dostosowania momentu napędowego do oporów ruchu tak, aby osiągnąć odpowiednią prędkość jazdy tramwaju, rysunek 9.

Dla punktu przecięcia  $n_{x1}$  charakterystyk  $M_{st1}(n)$  i  $M_{st2}(n)$  musi być spełniony warunek:

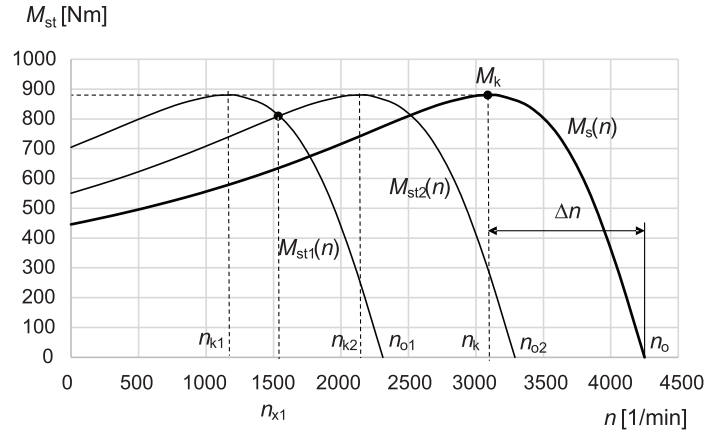
$$M_{st1}(n_{x1}) = M_{st2}(n_{x2}), \quad (69)$$

czyli (po zastosowaniu wzoru (31)):

$$\frac{s_1 s_{k1}}{s_1^2 + s_{k1}^2} = \frac{s_2 s_{k2}}{s_2^2 + s_{k2}^2}, \quad (70)$$

gdzie:

$$s_i = 1 - \frac{n}{n_{oi}}, \quad s_{ki} = 1 - \frac{n_{ki}}{n_{oi}}, \quad i = 1, 2. \quad (71)$$



Rys. 9. Sterowane charakterystyki silnika  $M_{st1}(n)$  i  $M_{st2}(n)$  przecinające się w punkcie  $n_{k1}$  oraz charakterystyka nominalna  $M_s(n)$  [opracowanie własne]

Po podstawieniu wzorów (71) do (70) otrzymuje się równanie:

$$\frac{(n_{o1} - n) \cdot n_{o1} s_{k1}}{(n_{o1} - n)^2 + n_{o1}^2 s_{k1}^2} = \frac{(n_{o2} - n) \cdot n_{o2} s_{k2}}{(n_{o2} - n)^2 + n_{o2}^2 s_{k2}^2}, \quad (72)$$

w którym należy uwzględnić zależności:

$$n_{o1} s_{k1} = n_{o2} s_{k2} = n_o s_k = n_o - n_k = \Delta n. \quad (73)$$

Zatem, po stosownych przekształceniach, otrzymuje się równanie kwadratowe:

$$(n_{o1} - n) \cdot (n_{o2} - n) - \Delta n^2 = 0, \quad (74)$$

z pierwiastkiem

$$n_{x1} = \frac{n_{o1} + n_{o2}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{n_{o1} - n_{o2}}{2}\right)^2 + \Delta n^2}. \quad (75)$$

Po zastosowaniu zmiennych bezwymiarowych:

$$\xi = \frac{n}{n_o}, \quad \xi_{xi} = \frac{n_{xi}}{n_o}, \quad \xi_{oi} = \frac{n_{oi}}{n_o}, \quad s_k = \frac{\Delta n}{n_o}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (76)$$

rozwiązanie ma postać:

$$\xi_{x1} = \frac{\xi_{o1} + \xi_{o2}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\xi_{o1} - \xi_{o2}}{2}\right)^2 + s_k^2} \quad (77)$$

lub ogólnie:

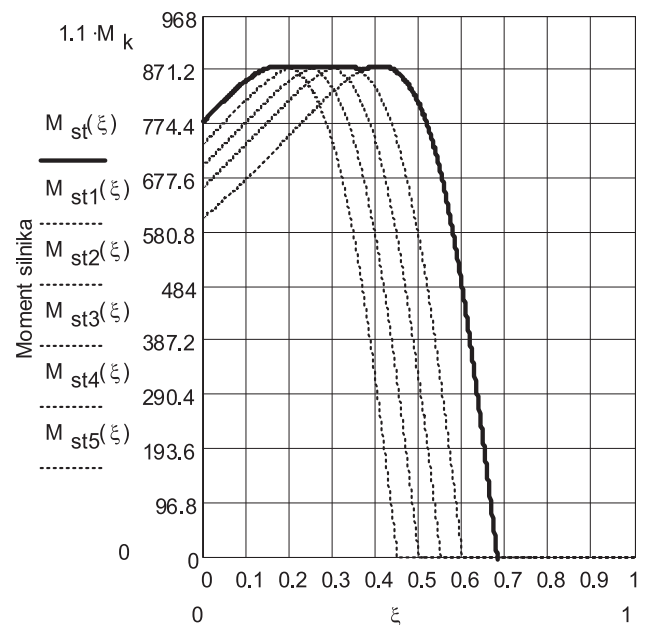
$$\xi_{xi} = \frac{\xi_{oi} + \xi_{o,i+1}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\xi_{oi} - \xi_{o,i+1}}{2}\right)^2 + s_k^2}. \quad (78)$$

### 6.2. Symulacja rozruchu tramwaju

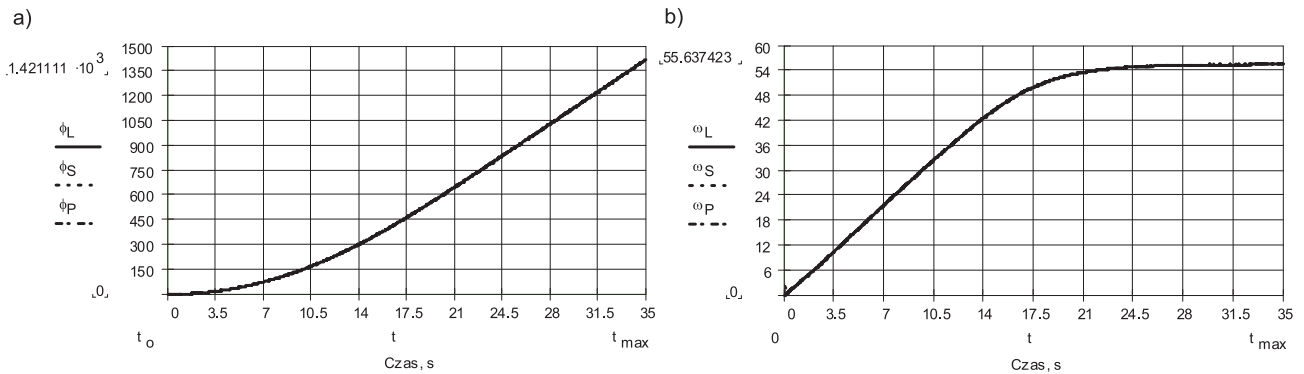
Przeanalizowano przypadek sterowania silnika z zastosowaniem pięciu charakterystyk cząstkowych. Do obliczeń symulacyjnych zastosowano wzór na moment sterowania  $M_{st}(\xi)$  w postaci zaprezentowanej

we wzorze (79). Tworzy on obwiednię charakterystyk cząstkowych  $M_{sti}(\xi)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$  pokazaną na rysunku 10 (linia ciągła gruba).

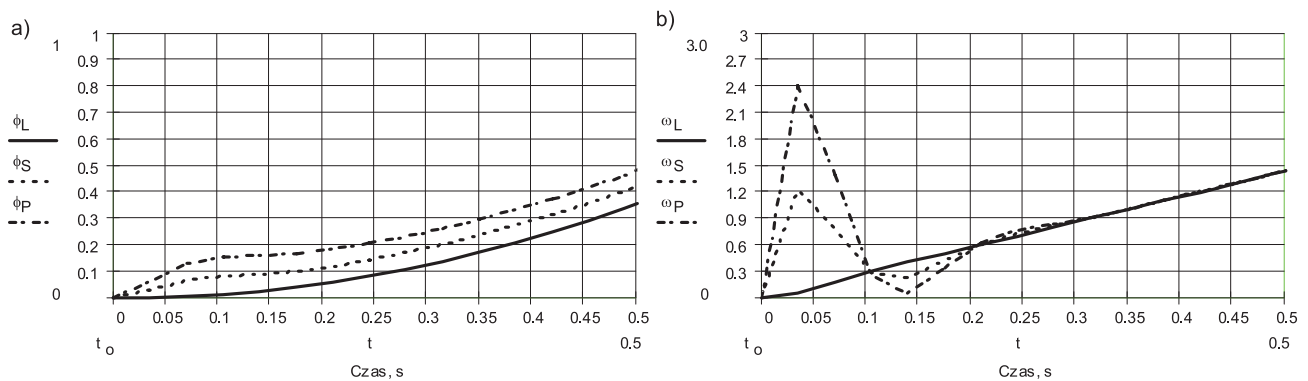
$$M_{st}(\xi) = 2M_k s_k \cdot \begin{cases} \frac{\xi_{o1} - \xi}{(\xi_{o1} - \xi)^2 + s_k^2} & \text{if } 0 \leq \xi \leq \xi_{x1} \\ \frac{\xi_{o2} - \xi}{(\xi_{o2} - \xi)^2 + s_k^2} & \text{if } \xi_{x1} \leq \xi \leq \xi_{x2} \\ \frac{\xi_{o3} - \xi}{(\xi_{o3} - \xi)^2 + s_k^2} & \text{if } \xi_{x2} \leq \xi \leq \xi_{x3} \\ \frac{\xi_{o4} - \xi}{(\xi_{o4} - \xi)^2 + s_k^2} & \text{if } \xi_{x3} \leq \xi \leq \xi_{x4} \\ \frac{\xi_{o5} - \xi}{(\xi_{o5} - \xi)^2 + s_k^2} & \text{if } \xi_{x4} \leq \xi \leq \xi_{x5} \end{cases} \quad (79)$$



Rys. 10. Przebieg zmian momentu silnika  $M_{st}(\xi)$  (w Nm) [opracowanie własne]



Rys. 11. Pierwsze sekundy (do 35 s) przebiegu zmian: a) kątów obrotu (w rad):  $\phi_L, \phi_S, \phi_P$ ; b) prędkości kątowej (w rad/s):  $\omega_L = \dot{\phi}_L, \omega_S = \dot{\phi}_S, \omega_P = \dot{\phi}_P$  [opracowanie własne]



Rys. 12. Początkowe chwile (do 0,5 s) przebiegu: a) zmian kątów obrotu (w rad):  $\phi_L, \phi_S, \phi_P$ ; b) zmian prędkości kątowej (w rad/s):  $\dot{\phi}_L, \dot{\phi}_S, \dot{\phi}_P$  [opracowanie własne]

Na rysunku 11 zaprezentowano wyniki przykładowej symulacji rozruchu układu napędowego tramwaju. Wykresy pokazują pierwsze 35 sekund przebiegu zmian kątów obrotu (w radianach):  $\phi_L, \phi_S, \phi_P$ ; oraz prędkości kątowej (w rad/s):  $\omega_L = \dot{\phi}_L, \omega_S = \dot{\phi}_S, \omega_P = \dot{\phi}_P$ . Maksymalna prędkość jazdy wyniosła 60 km/h i została ustabilizowana dla  $\xi = n/n_{05} = 0,681$ . Wykresy podobnych wielkości startowych (do 0,5 s) zaprezentowano na rysunku 12.

## 7. Podsumowanie

W artykule opisano budowę i zasadę działania oraz wyznaczono model dynamiczny układu napędowego, zbudowanego z wałów drążonych i sprzęgieł czterocięglowych, stosowanego w tramwajach niskopodłogowych. Ze względu na brak dostępnych danych, istotnym zadaniem było doświadczalne wyznaczenie masowych momentów bezwładności elementów układu napędowego metodą drgań skrętnych struny. W kolejnym etapie dokonano symulacji rozruchu tramwaju NGT6 przy

zadanych parametrach, a następnie symulacji drgań skrętnych poszczególnych składowych układu.

## Literatura

1. Przekładnia zespołu napędowego. NGT6-1 Obsługa Techniczna OT6, Nr dokumentu: 39\_OT6\_NGT6-01, Bombardier Transportation.
2. „Elektryczne wyposażenie niskopodłogowych wagonów tramwajowych NGT6 Miejskiego Przedsiębiorstwa Komunikacyjnego w Krakowie”, Vosloh Electrical Systems. Kiepe 00 KP 3 DEPI.
3. Czauderna T., Maniowski M.: *Analiza podatności sprzęgła 4-cięglowego stosowanego w niskopodłogowych tramwajach*, Konferencja Naukowo-Techniczna Nowoczesne Technologie w Transporcie Szynowym, Zakopane 2013, 2013.
4. Markusik S., Opasiak T.: *Wpływ błędów montażu sprzęgieł skrętnie podatnych na pracę układu napędowego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Transport, tom z. 44, nr 1562, 2002.

5. Krasieński M., Stachoń S.: *Nieustalone drgania w układach napędowych mechanizmu podnoszenia dźwigni w procesie rozruchu przy podnoszeniu ładunku*, Czasopismo Techniczne, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Z. 9–M/2008.
6. Biliński J. et. al.: *Opory ruchu tramwajów*, TTS Technika Transportu Szynowego, Eksploatacja, Tomy 2020, Nr 7–8, s. 64–66.
7. Wende D.: *Fahrdynamik des Schienenverkehrs*, Vieweg+Teubner Verlag/ Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2003.
8. Schaefer R.: *Mechanical properties of rubber*, Chapter 33, [in Harris' Shock and Vibration Handbook], Sixth Edition, 2010, pp. 33.1–33.18.

*Szczególne podziękowania autorzy kierują do Miejskiego Przedsiębiorstwa Komunikacyjnego S.A. w Krakowie: do Zarządu Spółki – za zgodę na przeprowadzenie badań, do pracowników Stacji Obsługi i Remontów za aktywną pomoc w przeprowadzeniu badań na terenie obiektu. Bez ich bardzo dużej pomocy, wyznaczenie masowych momentów bezwładności metodą drgań skrętnych struny nie byłoby możliwe.*