

Określanie długości ruchomej cięciwy do wyznaczania krzywizny eksploatowanego toru kolejowego

Władysław KOC¹

Streszczenie

W artykule rozwinięto, niewyjaśnioną jeszcze do końca, kwestię doboru długości cięciwy, która będzie najbardziej korzystna podczas wyznaczania krzywizny poziomej toru kolejowego z wykorzystaniem metody ruchomej cięciwy. W torze kolejowym – przy niewłaściwym doborze długości cięciwy – występujące deformacje poziome toru i błąd pomiaru współrzędnych mogą powodować uzyskanie nieregularnych wykresów krzywizny, które będą trudne do interpretacji. W artykule przeanalizowano trzy testowe układy geometryczne dostosowane do prędkości 80 km/h, 120 km/h i 160 km/h (wyznaczone w wyniku przeprowadzonej estymacji krzywizny, promienie łuków kołowych wynosiły odpowiednio około 410 m, 880 m i 1480 m). Rozpatrywano długości ruchomej cięciwy w zakresie 10÷50 m. Na podstawie przeprowadzonych analiz jednoznacznie wykazano, że długość cięciwy, przyjmowana do wyznaczania krzywizny w torze kolejowym, powinna zależeć od wartości występującego promienia łuku kołowego. Zaproponowano orientacyjne długości l_c w zależności od przedziału wartości promienia R_{LK} . Przedstawiono w artykule dostosowanie metody ruchomej cięciwy do przyjętej procedury pomiarowej oraz sposób wykorzystania uzyskanego wykresu krzywizny, stwarzają odpowiednie podstawy aplikacyjne.

Słowa kluczowe: tor kolejowy, krzywizna osi toru, metoda ruchomej cięciwy, aplikacje

1. Wprowadzenie

Kształt osi toru kolejowego w płaszczyźnie poziomej i płaszczyźnie pionowej wyznaczają podstawowe parametry geometryczne określone na drodze odpowiednich pomiarów. Stosowane obecnie metody pomiarowe są podobne w różnych zarządkach kolejowych [1–8]. W klasycznych technikach geodezyjnych wykorzystuje się pomiar odległości i kątów za pomocą tachimetrów oraz rachunek geodezyjny do wyznaczenia położenia osi toru w układzie przestrzennym, w dowiązaniu do przestrzennej osnowy geodezyjnej. Systemy te polegają na przemieszczaniu względnym tachimetru oraz pryzmatu skupiającego wiązkę laserową wzdłuż mierzonych odcinków toru, z wykorzystaniem specjalnie skonstruowanych do tych celów pojazdów pomiarowych bądź zaadoptowanych pojazdów w postaci wózków pchanych przez operatora.

Nowe możliwości w zakresie inwentaryzacji obiektów inżynierskich stwarza rozwój pomiarów satelitarnych i zwiększenie dokładności pomiarów opartych na technice *Global Navigation Satellite System* (GNSS), z wykorzystaniem aktywnych sieci geodezyjnych (np. sieci stacji referencyjnych pracujących w trybie *Real*

Time Network (RTK) [9–11]). Rozwiązanie to nie wymaga wykorzystywania sieci punktów kolejowej osnowy naziemnej, gdyż systemy pomiarowe współpracują z sieciami stacji referencyjnych. W kolejnictwie stosowane są również nowoczesne metody mobilnych pomiarów z użyciem wielosensorowych urządzeń do wyznaczania położenia osi toru. Wykorzystywane są do tego celu odbiorniki satelitarne GNSS, inercyjne urządzenia *Inertial Navigation System* (INS) [12] wspomagające pomiary satelitarne oraz metody wizyjne, tzw. skanery laserowe *Terrestrial Laser Scanning* (TLS) [13], które z pewną – zróżnicowaną – dokładnością są w stanie wygenerować przebieg osi toru. Obecnie trwają badania możliwości zastosowania układów złożonych z odbiorników satelitarnych montowanych na różnych typach pojazdów [14–18].

W wyniku pomiarów geodezyjnych toru kolejowego uzyskuje się zestawy współrzędnych odpowiednich punktów pomiarowych. Ponieważ podstawowym celem prowadzonych pomiarów jest określenie parametrów geometrycznych mierzonej trasy, należy zastosować odpowiednie algorytmy obliczeniowe (nawiązujące – przykładowo – do zasad analitycznej metody projektowania) [19–22]. W pierwszym rzędzie nasuwa się

¹ Prof. dr hab. inż.; Politechnika Gdańska, Katedra Inżynierii Transportowej; e-mail: kocwl@pg.edu.pl.

rozwiązanie, które polega na wykorzystaniu uzyskanych danych pomiarowych do wyznaczenia występującej krzywizny układu geometrycznego.

Obecnie, najczęściej wykorzystywane narzędzie służące przyporządkowaniu punktów toru do odcinków o zdefiniowanej geometrii opiera się na wykresie strzałek poziomych odniesionych do cięciwy rozciągniętej wzdłuż toru. Wymaga to przeprowadzenia dodatkowego procesu pomiarowego, zaś sporządzony wykres pokazuje co prawda, wartości pomierzonych strzałek, jednak nie są na nim określone kierunki, w których te strzałki są mierzone. Linie odniesienia stanowią tutaj kierunki ustawienia cięciwy, które się stale zmieniają.

W pracach [23–25] przedstawiono stosowne analizy odnoszące się do zaproponowanej nowej metody wyznaczania krzywizny osi toru, określonej mianem „metody ruchomej cięciwy”. Dotyczyły one zastosowania tej metody dla modelowych układów geometrycznych (opisanych równaniami matematycznymi). W pracy [26] podjęto kwestię jej wykorzystania do estymacji poziomej krzywizny osi eksploatowanego toru kolejowego na podstawie współrzędnych kartezjańskich, uzyskanych na drodze przeprowadzonych pomiarów bezpośrednich.

2. Metoda ruchomej cięciwy do estymacji krzywizny osi toru

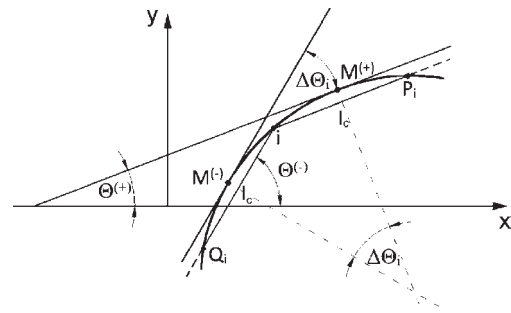
W wyniku pomiarów geodezyjnych są wyznaczone współrzędne kartezjańskie punktów trasy kolejowej w odpowiednim państwowym systemie odniesień przestrzennych. W Polsce – w odniesieniu do współrzędnych płaskich – obowiązuje układ PL-2000 [27], utworzony na podstawie matematycznie jednoznacznego przyporządkowania punktów na elipsoidzie odniesienia GRS 80 [28] odpowiednim punktom na płaszczyźnie według teorii odwzorowania Gaussa-Krügera [29].

Pierwszą czynnością, jaką należy wykonać w ramach analizy wyników pomiarów jest przeprowadzenie wizualizacji przebiegu pomierzonej trasy w płaszczyźnie poziomej. Konieczna jest do tego znajomość współrzędnych płaskich wschodnich Y oraz współrzędnych północnych X odpowiedniego punktu pomiarowego w układzie PL-2000. W rozpatrywanym przypadku podstawę wykresu zależności $X(Y)$ stanowi zbiór pomierzonych i odpowiednio skorygowanych współrzędnych Y_i i X_i . Właściwą identyfikację osi toru stanowią jednak odpowiednie wykresy odnoszące się do parametru długości L_i . W przypadku płaszczyzny poziomej są to wykresy krzywizny $\kappa(L)$, dla płaszczyzny pionowej zaś – wykresy rzędnych wysokościowych $H(L)$. Zatem, aby stworzyć możliwość dalszej analizy, należy przejść do układu liniowego,

czyli określić odległości (zmienną L) poszczególnych punktów pomiarowych od wybranego punktu początkowego i_0 .

Z praktycznego punktu widzenia najbardziej korzystne będzie przeniesienie danych pomiarowych do lokalnego układu współrzędnych x, y . Operacja ta będzie polegać na przesunięciu początku układu PL-2000 do wybranego punktu $O(Y_0, X_0)$; czasami dodatkowo może się okazać celowe dokonanie obrotu tego układu o odpowiedni kąt β .

Z definicji krzywizny wynika konieczność operowania kątami nachylenia stycznej do układu geometrycznego. W przypadku dysponowania zapisem matematycznym danej krzywej nie stanowi to oczywiście żadnego problemu. Jednak w rzeczywistości, najczęściej zdeformowanym w wyniku eksploatacji torze kolejowym określenie występującego położenia prostych stycznych jest bardzo utrudnione. Zupełnie inaczej wygląda natomiast sytuacja w odniesieniu do rozciągniętych cięciw, których położenie jest zawsze jednoznacznie ustalone. Pojawiła się zatem koncepcja, aby przy wyznaczaniu krzywizny osi toru nie operować stycznymi lecz odpowiadającymi wirtualnymi cięciwami. Założono przy tym, że dla rozpatrywanych niewielkich odcinków toru wymienione elementy geometryczne są do siebie równoległe, punkty styczności zaś rzutują się prostopadłe na środek danej cięciwy. Na rysunku 1 przedstawiono schemat ideowy wyznaczania krzywizny proponowaną metodą zmiany kątów nachylenia cięciwy; metodę tę określono mianem „metody ruchomej cięciwy” [23].



Rys. 1. Schemat ideowy wyznaczania krzywizny metodą ruchomej cięciwy [opracowanie własne]

Do wyznaczenia osi toru w punkcie i , należy wykonać z tego punktu – do przodu i do tyłu – dwie cięciwy o długości l_c i wyznaczyć współrzędne ich punktów przecięcia z daną krzywą, tj. odpowiednio punkty P_i oraz Q_i . Ponieważ współrzędne punktu i są znane, można łatwo określić równania obydwu cięciw, wartości stycznych i kąty nachylenia. Krzywiznę κ_i wyznacza się z następującego wzoru:

$$\kappa_i = \frac{\Delta\Theta_i}{l_c}, \quad (1)$$

w którym l_c oznacza długość wirtualnej cięciwy, kąt $\Delta\Theta_i$ zaś wynika z różnicy kątów nachylenia cięciw zbiegających się w punkcie i , czyli:

$$\Delta\Theta_i = \Theta_i^{(+)} - \Theta_i^{(-)}. \quad (2)$$

Stosowanie omawianej procedury wymaga dysponowania współzrędnymi danej krzywej w układzie kartezjańskim (zapisanej analitycznie lub w sposób dyskretny), bowiem wartości kątów $\Theta_i^{(+)}$ i $\Theta_i^{(-)}$ wynikają ze współczynników nachylenia prostych opisujących obydwie cięciwy.

W pracy [23] przedstawiono weryfikację zaproponowanej metody wyznaczania krzywizny poziomej na jednoznacznie zdefiniowanym elementarnym układzie geometrycznym torów, złożonym z łuku kołowego i dwóch symetrycznie ustawionych krzywych przejściowych (tego samego rodzaju i tej samej długości), obliczonym według zasad analitycznej metody projektowania [19]. Rozpatrzono kilka przypadków geometrycznych dla różnych prędkości jazdy pociągów, przy czym różnicowano także rodzaje zastosowanych krzywych przejściowych oraz kąty zwrotu trasy. Uzyskano całkowitą zgodność uzyskanych wykresów krzywizny z wykresami stanowiącymi podstawę uzyskania odpowiadającego rozwiązania geometrycznego. Dotyczyło to zarówno odcinków łuku kołowego, jak też rejonów krzywych przejściowych.

Zwrócono również uwagę, że proponowana metoda stwarza duże możliwości aplikacyjne. Praktyczny aspekt przedstawionych rozważań może ujawnić się wówczas, gdy charakterystyki geometryczne wyznaczonej na drodze pomiarów osi toru nie będą znane i celem podstawowym stanie się wyznaczenie tychże charakterystyk. W tej sytuacji opisana metoda idealnie odpowiada założeniom mobilnych pomiarów satelitarnych, gdyż dostarczają one współzrędną osi toru w układzie kartezjańskim, w bardzo dużej liczbie i bardzo krótkim czasie.

W pracy [24] podjęto dwie istotne kwestie szczegółowe: wpływu długości cięciwy na uzyskiwane wartości krzywizny poziomej oraz możliwości określania położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi. Analizowane warianty wynikały z rodzaju zastosowanych krzywych przejściowych. Stwierdzono, że dla układów modelowych wpływ długości cięciwy w zakresie od 5 do 20 m na wyznaczone wartości krzywizny jest nieistotny. Jednocześnie zwraca uwagę precyzja określenia charakteru krzywizny oraz jej zgodność z przebiegiem teoretycznym na krzywych przejściowych. Jednocześnie wykazano, że w metodzie ruchomej cięciwy określenie położenia punktów granicznych pomiędzy poszczególnymi elementami geometrycznymi jest możliwe, przy czym wymagana długość

cięciwy musi być dostosowana do rodzaju krzywej przejściowej.

W pracy [25] rozpatrzono nie tylko problem wyznaczania krzywizny w płaszczyźnie poziomej, lecz również w płaszczyźnie pionowej, wskazując na uniwersalność omawianej metody. Skupiono się tutaj na podstawach obliczeniowych tej metody, dotyczących kształtowania się kątów nachylenia ruchomej cięciwy. Stwierdzono, że dla łuku kołowego w płaszczyźnie poziomej wartości kątów nachylenia ruchomej cięciwy zależą od kąta zwrotu trasy, promienia łuku i długości cięciwy, natomiast sama różnica kątów nachylenia jest uzależniona od długości cięciwy i promienia łuku. W przypadku łuku kołowego w płaszczyźnie pionowej wartości kątów nachylenia ruchomej cięciwy są znacznie mniejsze niż ma to miejsce w płaszczyźnie poziomej, co jest związane z zakresem stosowanych promieni łuków. Tak jak w płaszczyźnie poziomej, o wartości różnicy kątów nachylenia ruchomej cięciwy decyduje promień łuku pionowego i długość cięciwy.

Po wyjaśnieniu kwestii podstawowych dotyczących proponowanej metody, w kolejnych pracach rozpoczęto wyjaśnianie jej aspektów aplikacyjnych. W pracy [26] podjęto kwestię wykorzystania metody ruchomej cięciwy do estymacji poziomej krzywizny osi eksploatowanego toru kolejowego na podstawie współrzędnych kartezjańskich, uzyskanych na drodze przeprowadzonych pomiarów bezpośrednich. Uzyskane wykresy krzywizny miały już mniej regularny, oscylacyjny charakter, co jednak nie przeszkadzało, żeby można było na ich podstawie oszacować podstawowe parametry geometryczne mierzonego układu. Pokazano sposób dostosowania metody ruchomej cięciwy do przyjętej procedury pomiarowej oraz praktycznego wykorzystania uzyskanego wykresu krzywizny. Oprócz wyznaczenia wartości promienia łuku kołowego, na podstawie tego wykresu można określić długości krzywych przejściowych oraz lokalizację punktów charakterystycznych; stwarza to omawianej metodzie odpowiednie podstawy wdrożeniowe.

W pracy [30] została przedstawiona szczegółowo procedura estymacji krzywizny poziomej z myślą o jej praktycznym zastosowaniu w eksploatowanym torze kolejowym. Ponieważ w wykorzystywanych pomiarach rozpatrujemy układ geometryczny o nieznanych charakterystykach i nie ma możliwości operowania zapisem matematycznym, podstawowy problem dotyczy wyznaczania współrzędnych końców obydwu cięciw przez interpolację przeprowadzoną w odpowiednich przedziałach. Jak się jednak okazuje, istnieje możliwość przeprowadzenia całej procedury bez konieczności odwoływania się do metod numerycznych. Przedstawiony tok postępowania polega na wykorzystaniu podanych wzorów obliczeniowych i ma charakter sekwencyjny.

W tym miejscu należy wyjaśnić, że w praktyce utrzymywanej identyfikacja układów geometrycznych toru na podstawie estymacji krzywizny jest możliwa jedynie dla płaszczyzny poziomej. W płaszczyźnie pionowej, w której występują bardzo duże promienie łuków wyokrąglających załomy profilu podłużnego, wartości krzywizny okazują się zbyt małe w relacji do występującego błędu pomiarowego.

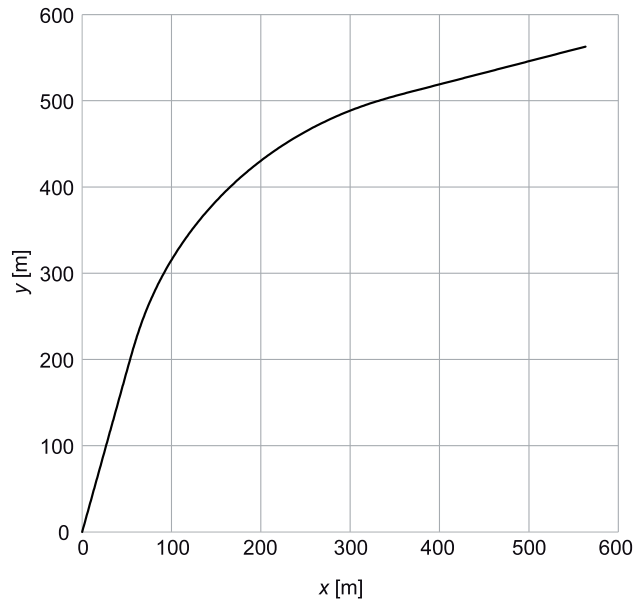
Niniejszy artykuł skupia się na niewyjaśnionej jeszcze do końca kwestii o charakterze kluczowym – doboru długości cięciwy, która w konkretnej sytuacji będzie najbardziej korzystna. Formalnie, w metodzie ruchomej cięciwy nie ma to większego znaczenia. Jak wykazano w pracy [24], dla układów modelowych, wpływ zastosowanej długości cięciwy (w zakresie od 5 do 20 m) na wyznaczone wartości krzywizny okazał się nieistotny. Jednak w eksploatowanym torze kolejowym, z uwagi na deformacje toru i błąd pomiarowy, sytuacja może wyglądać zupełnie inaczej. Świadczą o tym chociażby nieregularne wykresy krzywizny pokazane w pracy [31], gdzie stosowano cięciwę $l_c = 7$ m. W artykule poddano analizie trzy testowe układy geometryczne dostosowane do prędkości 80, 120 i 160 km/h. Współrzędne kartezjańskie poszczególnych punktów pomiarowych zostały wyznaczone w odstępach około 5 m, a maksymalny błąd tej operacji wyniósł ± 25 mm.

3. Odcinek testowy dostosowany do prędkości 80 km/h

Na rysunku 2 przedstawiono przebieg trasy na odcinku testowym, dostosowanym do prędkości 80 km/h w lokalnym układzie współrzędnych. Jak widać, odcinek testowy stanowią dwa proste odcinki toru połączone ze sobą łukiem o nieznanych charakterystykach. Poza tym stwierdzeniem rysunek 2 niewiele wyjaśnia. Aby można było dokonać pełnej identyfikacji danego układu geometrycznego, należy przeprowadzić estymację występującej krzywizny osi toru, stosując metodę ruchomej cięciwy.

W rozpatrywanym przypadku wykorzystano wirtualne cięciwy, wystawione z danego punktu do przodu i do tyłu, o długościach 10 m, 20 m i 30 m. Na rysunku 3 pokazano uzyskane wykresy krzywizny. Każdy wykres $\kappa(L)$ składa się z elementów dwójakiego rodzaju:

- odcinków oscylujących wokół przebiegu poziomego, które opisują krzywiznę o ustalonej wartości (równiej zero na prostych odcinkach toru i niezerowej na łukach kołowych),
- odcinków oscylujących wokół przebiegu liniowego (czyli prostych nachylonych do osi L), które opisują zmienną krzywiznę występującą na krzywych przejściowych.



Rys. 2. Przebieg trasy na odcinku testowym toru dostosowanym do prędkości 80 km/h w lokalnym układzie współrzędnych [opracowanie własne]

Na podstawie tych wykresów można wyznaczyć wartość promienia łuku kołowego i długości krzywych przejściowych, a także lokalizację tzw. punktów segmentacyjnych (leżących na połączeniach odcinków prostych z krzywymi przejściowymi oraz krzywych przejściowych z łukiem kołowym).

Przyjmuje się, że krzywizna toru na odcinkach prostych jest równa zero, a występujące tam zaburzenia na wykresie krzywizny są wynikiem istniejących deformacji i błędów pomiarowych. Z zaznaczonego zakresu wartości krzywizny bezspornie należących do łuku kołowego jest wyznaczana średnia arytmetyczna κ_{LK} ; jej odwrotność określa wartość promienia:

$$R \cong \frac{1}{\kappa_{LK}}. \quad (3)$$

W tabelicy 1 podano odpowiednie charakterystyki liczbowe odnoszące się do łuku kołowego. Przyjęto w niej (jak również w tablicach 4 i 7) następujące oznaczenia:

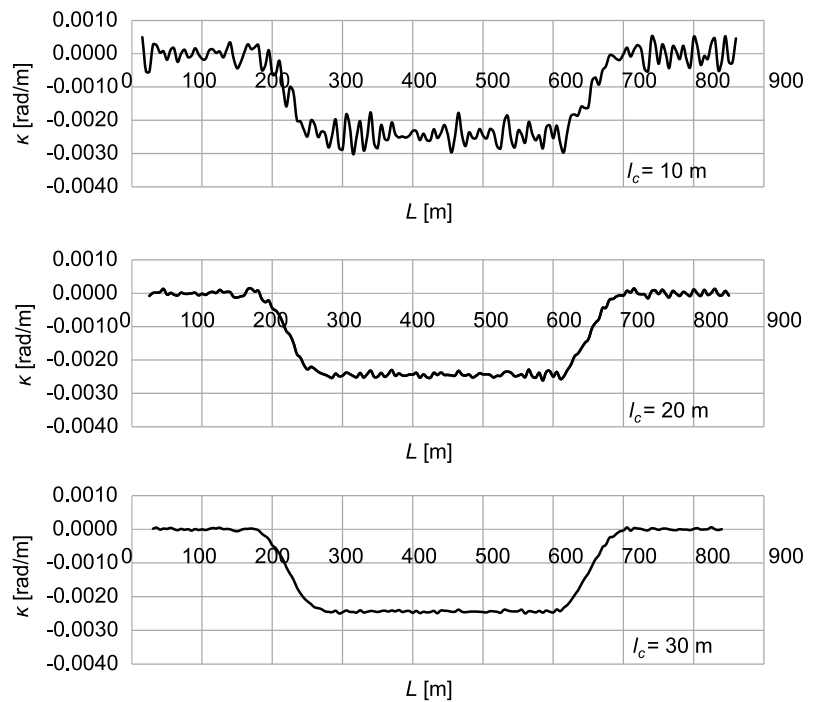
l_c – długość cięciwy,

κ_{LK} – wartość średnia krzywizny na łuku kołowym,

R_{LK} – promień łuku kołowego wynikający ze średniej wartości krzywizny,

σ_κ – wartość odchylenia standardowego krzywizny na łuku kołowym,

s_κ – procentowa relacja odchylenia standardowego krzywizny do wartości średniej.



Rys. 3. Wykresy krzywizny na długości odcinka testowego toru dostosowanego do prędkości 80 km/h uzyskane przy wykorzystaniu cięciwy o długości $l_c = 10$ m, 20 m i 30 m [opracowanie własne]

Tablica 1

Charakterystyki liczbowe dotyczące estymacji krzywizny na łuku kołowym dla odcinka testowego toru dostosowanego do $V = 80$ km/h

l_c [m]	$\overline{\kappa_{LK}}$ [rad/m]	R_{LK} [m]	σ_κ [rad/m]	s_κ [%]
10	-0,00243235	411,125	0,00028569	11,746
20	-0,00244140	409,600	0,00006643	2,721
30	-0,00244067	409,723	0,00002626	1,076

[Opracowanie własne].

Po obu stronach łuku kołowego występują krzywe przejściowe. Można je łatwo zidentyfikować na wykresie $\kappa(L)$ – rzędne krzywizny oscylują tam wokół przebiegu liniowego. Aby wyznaczyć współrzędne liniowe początków (L_{PKP}) i końców (L_{KKP}) krzywych przejściowych, należy określić współczynniki prostych aproksymacyjnych najmniejszych kwadratów, opisujących rejony wykresu $\kappa(L)$ o zmiennych wartościach krzywizny. Proste w postaci:

$$\kappa(L) = a + b \cdot L, \quad (4)$$

wyznaczają współrzędne liniowe L ich punktów przecięcia z wykresami krzywizny na odcinkach prostych toru (gdzie krzywizna $\kappa = 0$) i odcinkach łuku kołowego (gdzie krzywizna $\kappa = \kappa_{LK}$). Z wartości wyznaczonych odpowiednich współrzędnych L_{PKP} i L_{KKP} wynika w sposób bezpośredni długość krzywej przejściowej:

$$l_{KP} = |L_{KKP} - L_{PKP}|. \quad (5)$$

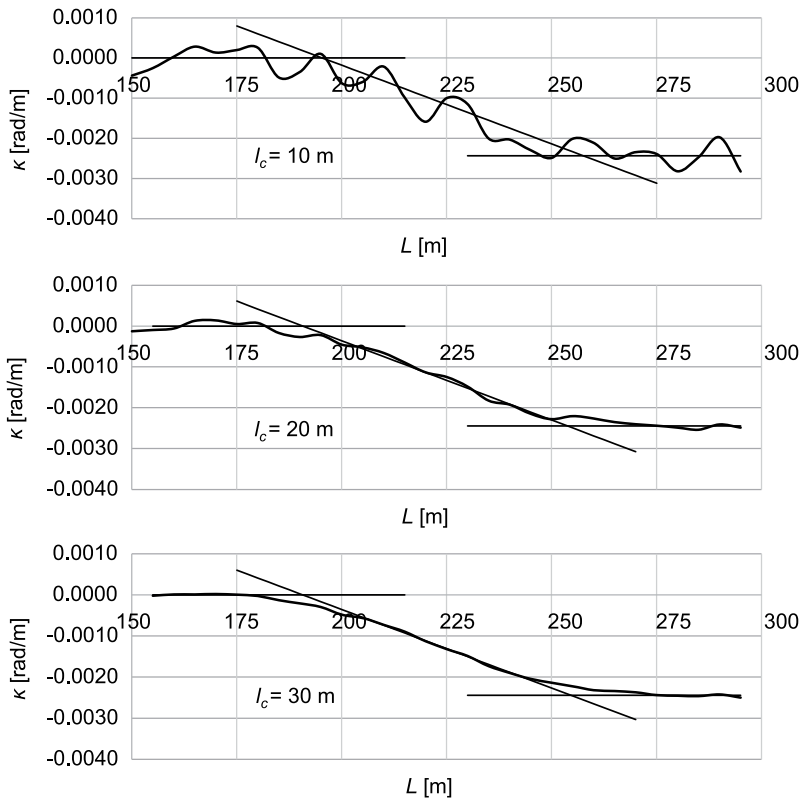
Na rysunku 4 pokazano efekty identyfikacji krzywej przejściowej KP1 zlokalizowanej po lewej stronie układu geometrycznego po rysunku 2, a w tablicy 2 – odpowiednie charakterystyki obliczeniowe. W tablicy 2 (a także w tablicach 3, 5, 6, 8 i 9) przyjęto następujące oznaczenia:

- a, b – współczynniki prostej aproksymacyjnej najmniejszych kwadratów opisującej krzywiznę osi toru na krzywej przejściowej,
- L_{PKP} – współrzędna liniowa początku krzywej przejściowej,
- L_{KKP} – współrzędna liniowa końca krzywej przejściowej,
- l_{KP} – długość krzywej przejściowej.

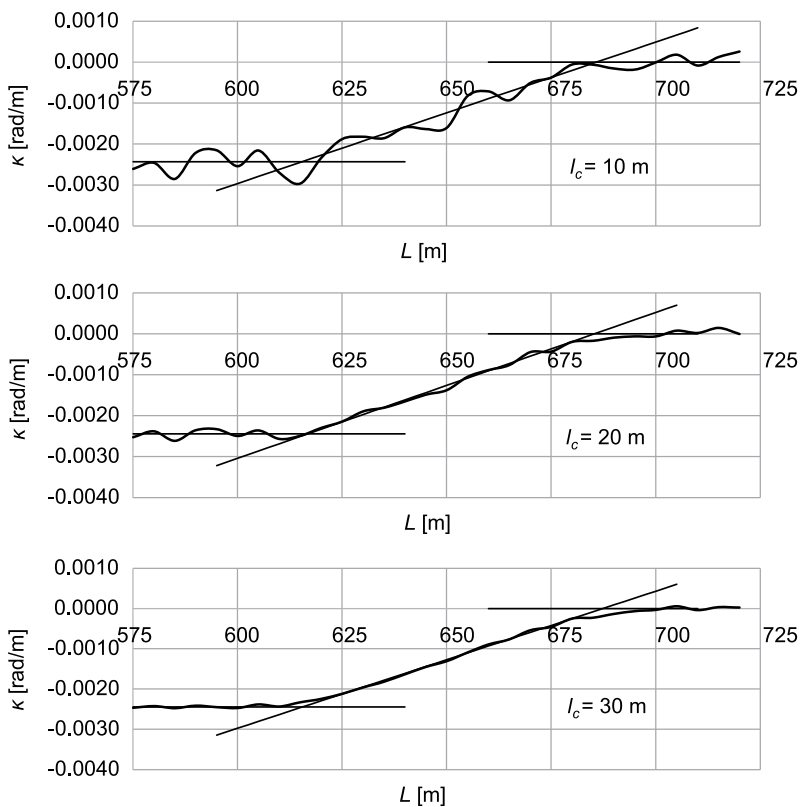
Na rysunku 5 pokazano efekty identyfikacji krzywej przejściowej KP2 zlokalizowanej z prawej strony układu geometrycznego na rysunku 2, a w tablicy 3 – odpowiednie charakterystyki obliczeniowe.

Z przeprowadzonej analizy wynikają następujące spostrzeżenia:

- z punktu widzenia wyznaczania krzywizny łuku kołowego najbardziej korzystne okazało się stosowanie cięciwy o długości $l_c = 30$ m, można również dopuścić $l_c = 20$ m; stosowanie $l_c = 10$ m należy uznać jako niewłaściwe,
- powyższe ustalenia obowiązują również przy identyfikacji krzywej przejściowej KP1,
- przy identyfikacji krzywej przejściowej KP2 najbardziej korzystne okazało się stosowanie $l_c = 20$ m (można dopuścić $l_c = 30$ m); natomiast cięciwa o długości $l_c = 10$ m jest mało przydatna.



Rys. 4. Identyfikacja krzywej przejściowej KP1 na odcinku testowym toru dostosowanym do prędkości 80 km/h (wykresy krzywizny uzyskane przy wykorzystaniu cięciwy o długości $l_c = 10$ m, 20 m i 30 m) [opracowanie własne]



Rys. 5. Identyfikacja krzywej przejściowej KP2 na odcinku testowym toru dostosowanym do prędkości 80 km/h (wykresy krzywizny uzyskane przy wykorzystaniu cięciwy o długości $l_c = 10$ m, 20 m i 30 m) [opracowanie własne]

Tablica 2

Charakterystyki liczbowe dotyczące identyfikacji krzywej przejściowej KP1 dla odcinka testowego toru dostosowanego do $V = 80$ km/h

l_c [m]	a [rad/m]	b [rad/m ²]	L_{PKP1} [m]	L_{KKP1} [m]	L_{KP1} [m]
10	0,00765151	-0,00003916	195,406	257,524	62,118
20	0,00739782	-0,00003879	190,739	253,686	62,947
30	0,00729227	-0,00003823	190,747	254,589	63,842

[Opracowanie własne].

Tablica 3

Charakterystyki liczbowe dotyczące identyfikacji krzywej przejściowej KP2 dla odcinka testowego toru dostosowanego do $V = 80$ km/h

l_c [m]	a [rad/m]	b [rad/m ²]	L_{PKP2} [m]	L_{KKP2} [m]	L_{KP2} [m]
10	-0,02367021	0,0003451	685,829	615,353	70,476
20	-0,02440522	0,0003561	685,340	616,781	68,559
30	-0,02338751	0,0003403	687,352	615,622	71,731

[Opracowanie własne].

Podsumowując, można postawić tezę, że dla promienia łuku kołowego $R \cong 400$ m najbardziej korzystne okazuje się przyjęcie długości wirtualnej cięciwy $l_c = 20$ m (lub ewentualnie $l_c = 30$ m). Z podanych wartości, krótsza cięciwa dokładniej wyznacza długość krzywej przejściowej.

4. Odcinek testowy toru dostosowany do prędkości 120 km/h

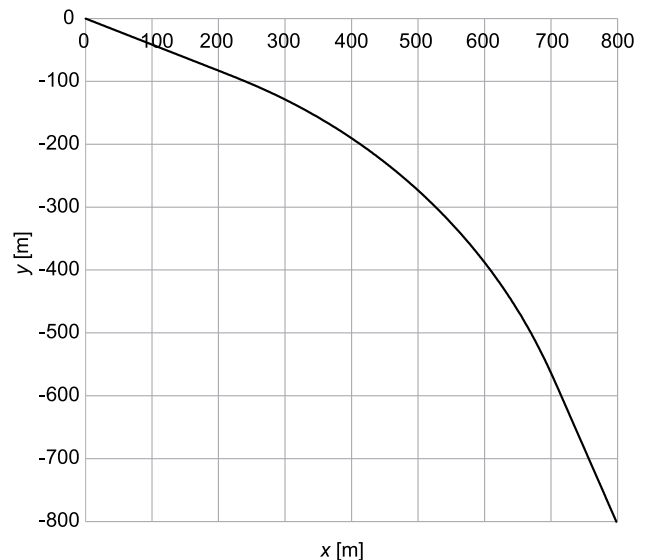
Na rysunku 6 przedstawiono przebieg trasy na odcinku testowym toru dostosowanym do prędkości 120 km/h. W danym przypadku wykorzystano wirtualne cięciwy o długościach 10 m, 20 m, 30 m i 40 m. Na rysunku 7 pokazano uzyskane wykresy krzywizny $\kappa(L)$, a w tablicy 4 – odpowiednie charakterystyki liczbowe odnoszące się do łuku kołowego.

Tablica 4

Charakterystyki liczbowe dotyczące estymacji krzywizny na łuku kołowym dla odcinka testowego toru dostosowanego do $V = 120$ km/h

l_c [m]	$\overline{\kappa_{LK}}$ [rad/m]	R_{LK} [m]	σ_κ [rad/m]	s_κ [%]
10	-0,00113388	881,930	0,00025615	22,590
20	-0,00113669	879,746	0,00006268	5,514
30	-0,00113694	879,557	0,00002689	2,365
40	-0,00113681	879,653	0,00001609	1,416

[Opracowanie własne].



Rys. 6. Przebieg trasy na odcinku testowym toru dostosowanym do prędkości 120 km/h w lokalnym układzie współrzędnych [opracowanie własne]

Na rysunku 8 pokazano efekty identyfikacji krzywej przejściowej KP1 zlokalizowanej z lewej strony układu geometrycznego na rysunku 6, a w tablicy 5 – odpowiednie charakterystyki obliczeniowe.

Tablica 5

Charakterystyki liczbowe dotyczące identyfikacji krzywej przejściowej KP1 dla odcinka testowego toru dostosowanego do $V = 120$ km/h

l_c [m]	a [rad/m]	b [rad/m ²]	L_{PKP1} [m]	L_{KKP1} [m]	L_{KP1} [m]
10	0,00225219	-0,00001151	195,601	294,077	98,476
20	0,00241139	-0,00001212	199,038	292,861	93,823
30	0,00244596	-0,00001228	199,165	291,741	92,576
40	0,00234201	-0,00001185	197,565	293,463	95,898

[Opracowanie własne].

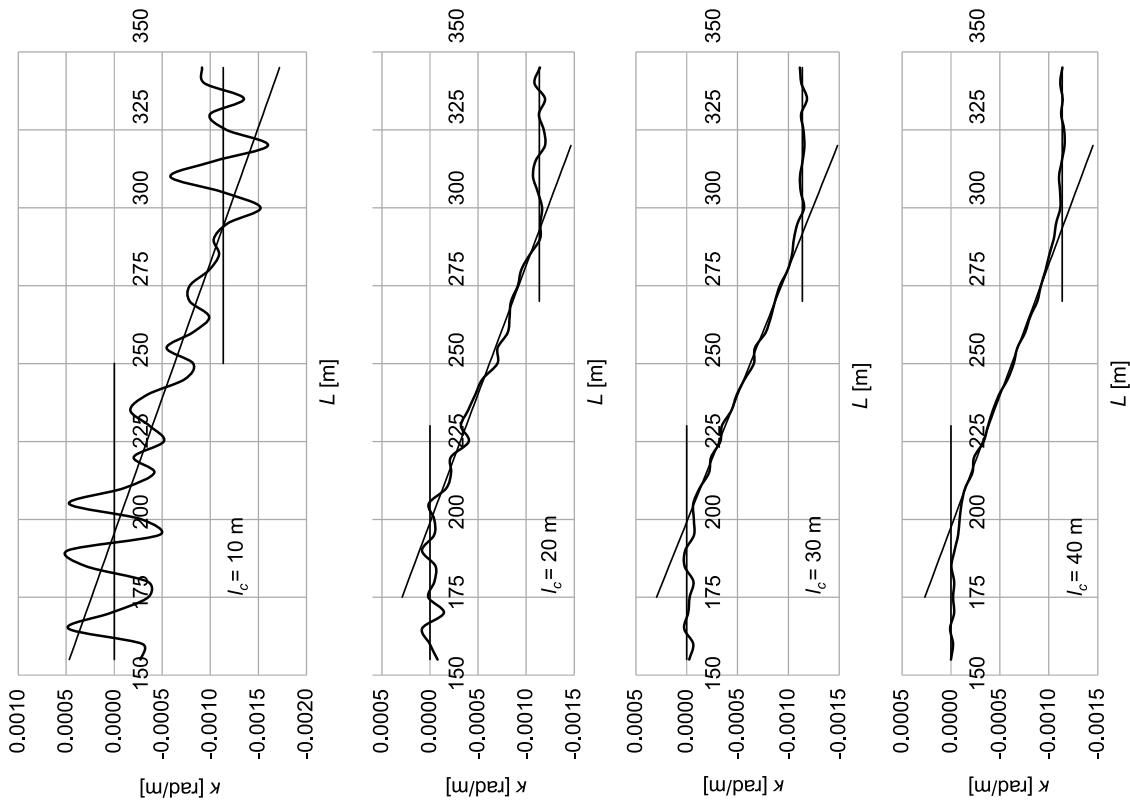
Na rysunku 9 pokazano efekty identyfikacji krzywej przejściowej KP2 zlokalizowanej z prawej strony układu geometrycznego na rysunku 6, a w tablicy 6 – odpowiednie charakterystyki obliczeniowe.

Tablica 6

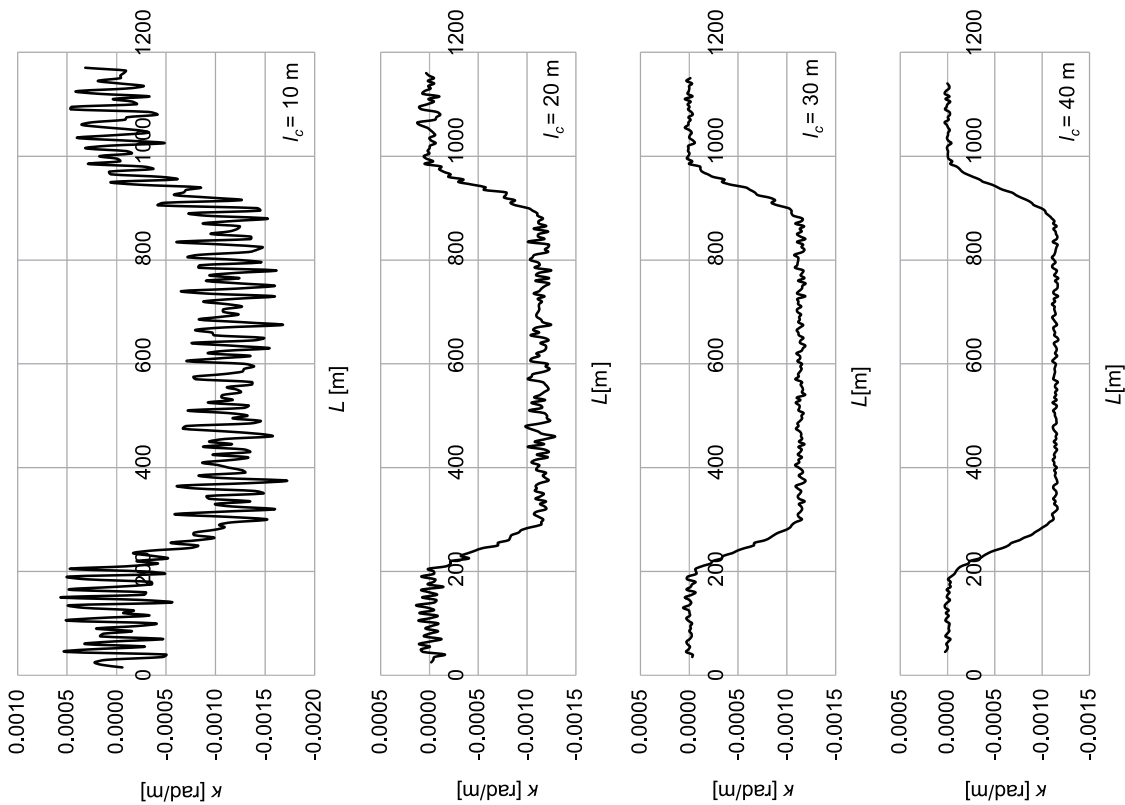
Charakterystyki liczbowe dotyczące identyfikacji krzywej przejściowej KP2 dla odcinka testowego toru dostosowanego do $V = 120$ km/h

l_c [m]	a [rad/m]	b [rad/m ²]	L_{PKP2} [m]	L_{KKP2} [m]	L_{KP2} [m]
10	-0,01359770	0,00001391	977,437	895,931	81,506
20	-0,01208245	0,00001230	982,005	889,620	92,385
30	-0,01237697	0,00001261	981,138	891,012	90,126
40	-0,01196196	0,00001217	989,465	891,026	93,408

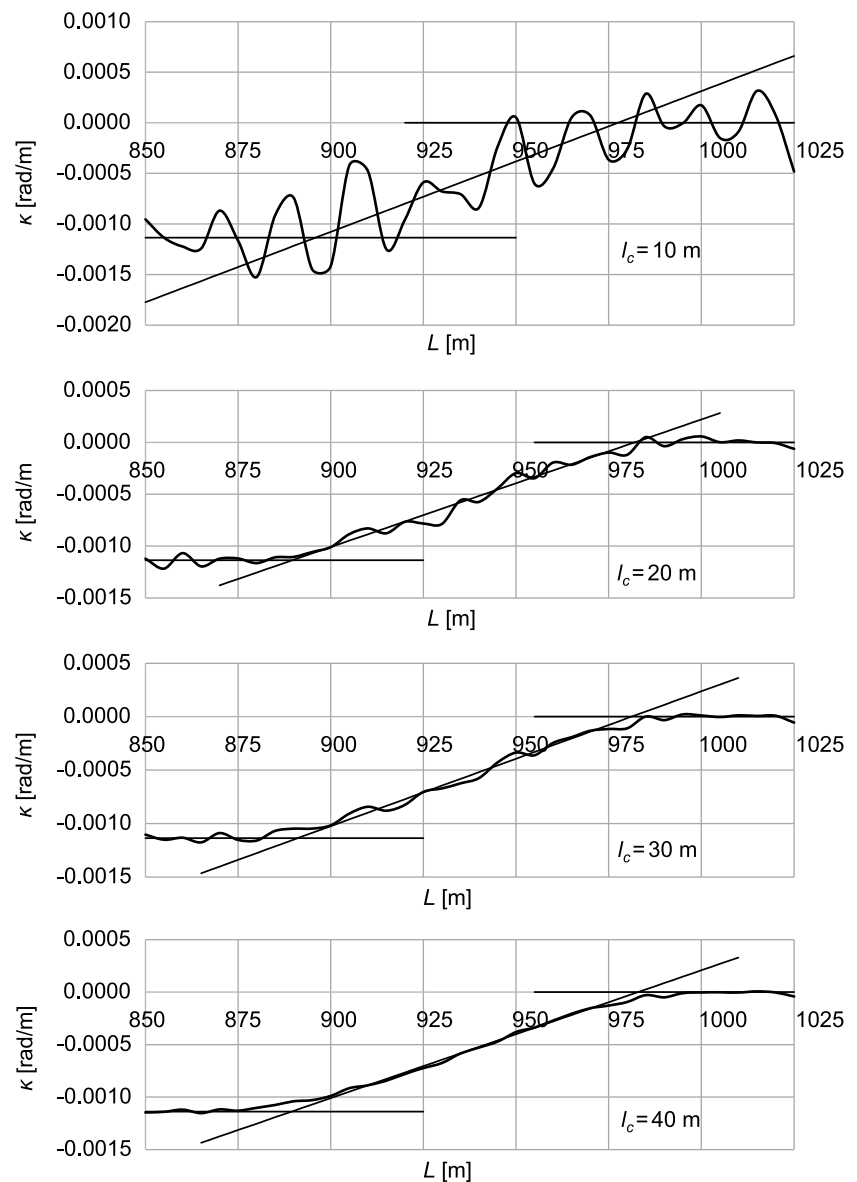
[Opracowanie własne].



Rys. 8. Identyfikacja krzywej przejściowej KPI na odcinku testowym toru dostosowanym do dla prędkości 120 km/h (wykresy krzyżowy uzyskane przy wykorzystaniu cięciwy o długości $l_c = 10$ m, 20 m, 30 m i 40 m) [opracowanie własne]



Rys. 7. Wykresy krzyżowy na długości odcinka testowego toru dostosowanego do prędkości 120 km/h uzyskane przy wykorzystaniu cięciwy o długości $l_c = 10$ m, 20 m, 30 m i 40 m [opracowanie własne]



Rys. 9. Identyfikacja krzywej przejściowej KP2 na odcinku testowym toru dostosowanym do prędkości 120 km/h (wykresy krzywizny uzyskane przy wykorzystaniu cięciwy o długości $l_c = 10$ m, 20 m, 30 m i 40 m) [opracowanie własne]

Z analizy wynikają następujące spostrzeżenia:

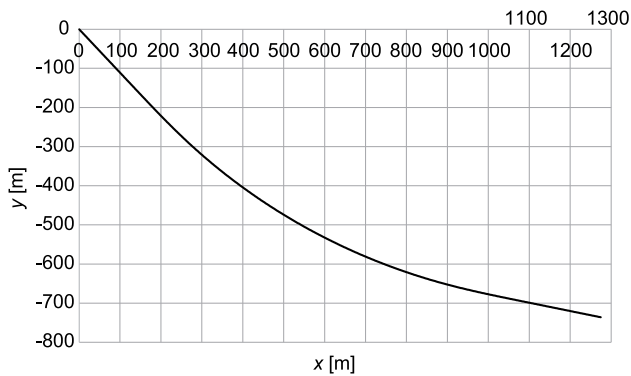
- do wyznaczania krzywizny łuku kołowego najbardziej korzystne okazało się stosowanie cięciwy o długości $l_c = 40$ m, można również dopuścić $l_c = 30$ m; stosowanie $l_c = 10$ m należy uznać jako niedopuszczalne,
- przy identyfikacji krzywej przejściowej KP1 najbardziej korzystne okazało się stosowanie długości $l_c = 30$ m, można również dopuścić $l_c = 40$ m i $l_c = 20$ m; stosowanie $l_c = 10$ m jest niedopuszczalne,
- przy identyfikacji krzywej przejściowej KP2 obowiązują takie same ustalenia jak dla krzywej przejściowej KP1.

Podsumowując, można postawić tezę, że dla promienia łuku kołowego $R \cong 900$ m najbardziej

korzystne okazuje się przyjęcie długości wirtualnej cięciwy $l_c = 30$ m (lub ewentualnie $l_c = 40$ m). Tak jak poprzednio, krótsza cięciwa lepiej wyznacza długość krzywej przejściowej.

5. Odcinek testowy toru dostosowany do prędkości 160 km/h

Na rysunku 10 przedstawiono przebieg trasy na odcinku testowym toru dostosowanym do prędkości 160 km/h. W danym przypadku wykorzystano wirtualne cięciwy o długościach 20 m, 30 m, 40 m i 50 m. Na rysunku 11 pokazano uzyskane wykresy krzywizny $\kappa(L)$, a w tabelicy 7 – odpowiednie charakterystyki liczbowe odnoszące się do łuku kołowego.



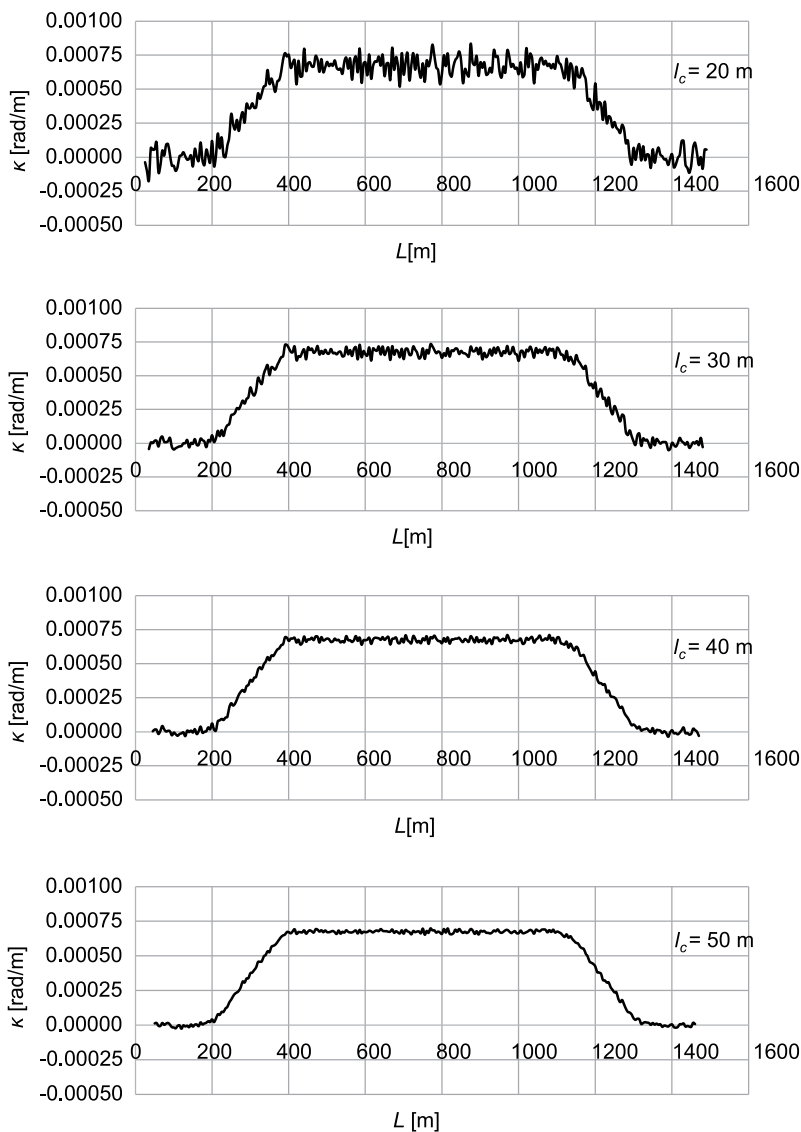
Rys. 10. Przebieg trasy na odcinku testowym toru dostosowanego do prędkości 160 km/h w lokalnym układzie współrzędnych [opracowanie własne]

Tablica 7
Charakterystyki liczbowe dotyczące estymacji krzywizny na łuku kołowym dla odcinka testowego toru dostosowanego do $V = 160$ km/h

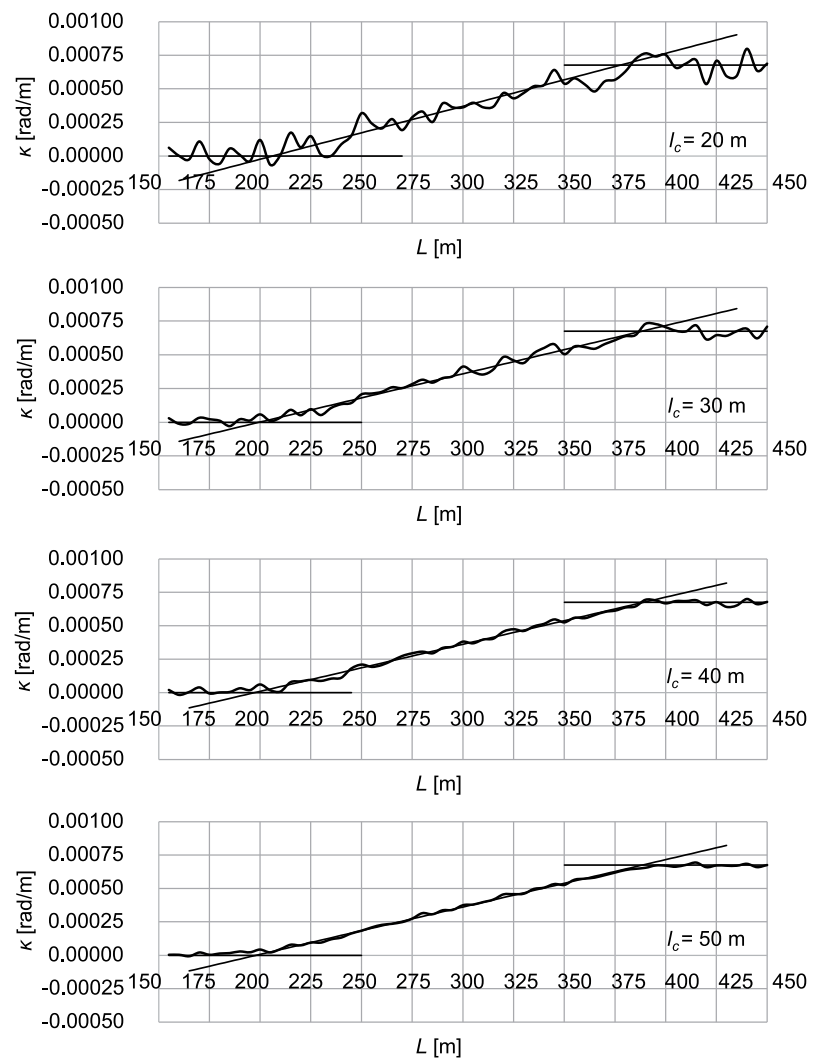
l_c [m]	$\overline{\kappa_{LK}}$ [rad/m]	R_{LK} [m]	σ_κ [rad/m]	s_κ [%]
20	0,00067629	1478,657	0,00006646	9,827
30	0,00067591	1479,496	0,00002858	4,228
40	0,00067596	1479,371	0,00001685	2,493
50	0,00067602	1479,252	0,00001021	1,511

[Opracowanie własne].

Na rysunku 12 pokazano efekty identyfikacji krzywizny przejściowej KP1 zlokalizowanej z lewej strony



Rys. 11. Wykresy krzywizny na długości odcinka testowego toru dostosowanego do prędkości 160 km/h uzyskane przy wykorzystaniu cięciwy o długości $l_c = 20$ m, 30 m, 40 m i 50 m [opracowanie własne]



Rys. 12. Identyfikacja krzywej przejściowej KP1 na odcinku testowym toru dostosowanym do prędkości 160 km/h (wykresy krzywizny uzyskane przy wykorzystaniu cięciwy o długości $l_c = 20$ m, 30 m, 40 m i 50 m) [opracowanie własne]

układu geometrycznego na rysunku 10, a w tablicy 8 – odpowiednie charakterystyki obliczeniowe.

Tablica 8
Charakterystyki liczbowe dotyczące identyfikacji krzywej przejściowej KP1 dla odcinka testowego toru dostosowanego do $V = 160$ km/h

l_c [m]	a [rad/m]	b [rad/m ²]	L_{PKP1} [m]	L_{KKP1} [m]	L_{KP1} [m]
20	-0,00081388	0,00000395	206,187	377,516	171,330
30	-0,00071376	0,00000358	199,475	388,371	188,896
40	-0,00069521	0,00000352	197,300	389,137	191,837
50	-0,00070185	0,00000355	197,966	388,646	190,680

[Opracowanie własne].

Na rysunku 13 pokazano efekty identyfikacji krzywej przejściowej KP2 zlokalizowanej z prawej strony układu geometrycznego na rysunku 10, a w tablicy 9 – odpowiednie charakterystyki obliczeniowe.

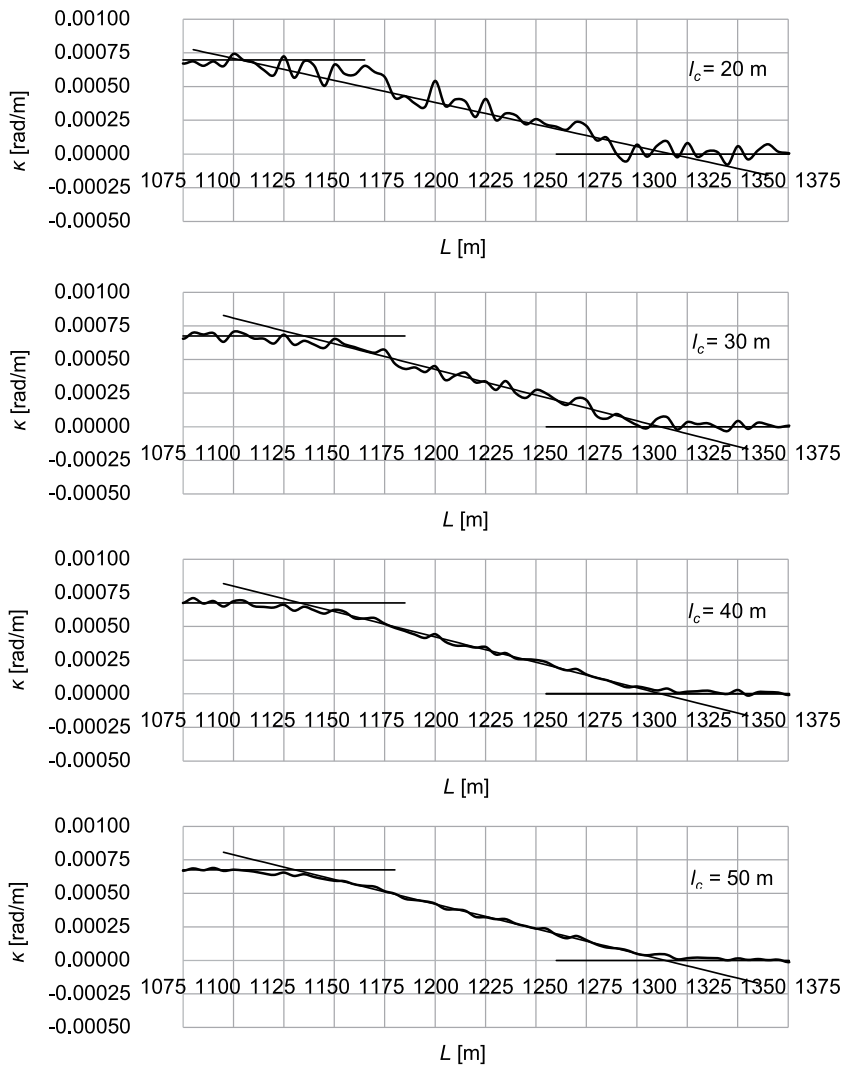
Tablica 9
Charakterystyki liczbowe dotyczące identyfikacji krzywej przejściowej KP2 dla odcinka testowego toru dostosowanego do $V = 160$ km/h

l_c [m]	a [rad/m]	b [rad/m ²]	L_{PKP2} [m]	L_{KKP2} [m]	L_{KP2} [m]
20	0,00429970	-0,00000326	1317,037	1103,456	213,581
30	0,00501263	-0,00000382	1311,621	1134,762	176,860
40	0,00495725	-0,00000378	1311,992	1133,091	178,901
50	0,00483857	-0,00000368	1314,097	1130,499	183,598

[Opracowanie własne].

Z analizy wynikają następujące spostrzeżenia:

- do wyznaczenia krzywizny łuku kołowego najbardziej korzystne okazało się stosowanie cięciwy o długości $l_c = 50$ m, można również dopuścić $l_c = 40$ m; stosowanie $l_c = 20$ m należy uznać jako niedopuszczalne,
- przy identyfikacji krzywej przejściowej KP1 najbardziej korzystne okazało się stosowanie długości



Rys. 13. Identyfikacja krzywej przejściowej KP2 na odcinku testowym toru dostosowanym do prędkości 160 km/h (wykresy krzywizny uzyskane przy wykorzystaniu cięciwy o długości $l_c = 20$ m, 30 m, 40 m i 50 m) [opracowanie własne]

- $l_c = 50$ m, chociaż można również dopuścić $l_c = 40$ m i $l_c = 30$ m; stosowanie $l_c = 20$ m jest niedopuszczalne, przy identyfikacji krzywej przejściowej KP2 najbardziej korzystne okazało się stosowanie długości $l_c = 40$ m, chociaż można również dopuścić $l_c = 50$ m i $l_c = 30$ m; stosowanie $l_c = 20$ m jest niedopuszczalne,

Podsumowując, można postawić tezę, że dla promienia łuku kołowego $R \cong 1500$ m najbardziej korzystne okazuje się przyjęcie długości wirtualnej cięciwy $l_c = 50$ m (lub ewentualnie $l_c = 40$ m). Tak jak poprzednio, krótsza cięciwa lepiej wyznacza długość krzywej przejściowej.

6. Rekomendacje dotyczące przyjmowanej długości wirtualnej cięciwy

Na podstawie przeprowadzonych analiz należy stwierdzić, że stosowanie długości wirtualnej cięciwy

$l_c = 10$ m nie jest rozwiązaniem racjonalnym. Przy dużych promieniach łuku kołowego mało przydatna może się również okazać cięciwa $l_c = 20$ m. Przyjmowana długość cięciwy powinna niewątpliwie zależeć od wartości promienia łuku kołowego. Można zaproponować następujące orientacyjne długości l_c w zależności od przedziału wartości R_{LK} :

- dla $R_{LK} \leq 600$ m $l_c = 20$ m,
- dla $600 < R_{LK} \leq 1000$ m $l_c = 30$ m,
- dla $1000 < R_{LK} \leq 1400$ m $l_c = 40$ m,
- dla $R_{LK} > 1400$ m $l_c = 50$ m.

Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, żeby – kierując się wymienionymi sugestiami – stosować również inne, pośrednie wartości l_c , gdyż najczęściej nie będzie to miało istotnego wpływu na dokładność uzyskiwanej krzywizny osi toru. Metoda ruchomej cięciwy jest pod tym względem bardzo elastyczna.

Istnieje również możliwość przyjęcia innej (czyli krótszej) cięciwy przy wyznaczaniu krzywizny na

długości krzywej przejściowej niż ma to miejsce dla łuku kołowego. W trakcie analizy dla odcinka testowego $V = 80$ km/h, do wyznaczenia krzywizny łuku kołowego byłoby najkorzystniej zastosować cięciwę $l_c = 30$ m, podczas gdy do określania krzywizny krzywej przejściowej – cięciwę $l_c = 20$ m. Dla odcinka testowego $V = 120$ km/h odpowiednie byłyby długości $l_c = 40$ m dla łuku kołowego i $l_c = 30$ m dla krzywych przejściowych, natomiast nad celowością zastosowania cięciwy $l_c = 40$ m przy identyfikacji krzywych przejściowych na odcinku testowym $V = 120$ km/h należałoby się już zastanowić (krzywizna łuku kołowego musi tutaj zostać wyznaczona przy wykorzystaniu cięciwy $l_c = 50$ m).

7. Wnioski

Podstawą do określenia położenia odcinków prostych toru kolejowego i odcinków położonych w łuku, jak również wyznaczenia odpowiednich parametrów geometrycznych, jest znajomość krzywizny osi toru. W pracach [23–25] została przedstawiona koncepcja nowej metody wyznaczania krzywizny (nazwanej „metodą ruchomej cięciwy”) oraz jej weryfikacja na jednoznacznie zdefiniowanym elementarnym układzie geometrycznym torów.

W pracach [26, 30, 31] omówiono procedurę estymacji krzywizny osi toru metodą ruchomej cięciwy przy wykorzystaniu współrzędnych kartezjańskich uzyskanych na drodze przeprowadzonych pomiarów bezpośrednich. Wykazano, że na podstawie wykresu krzywizny można określić wartości promienia łuku kołowego i długości krzywych przejściowych, jak również lokalizację tzw. punktów segmentacyjnych (czyli punktów granicznych pomiędzy odcinkami prostymi, krzywymi przejściowymi i łukami kołowymi).

Niniejszy artykuł skupia się na kwestii doboru długości cięciwy, która w konkretnej sytuacji będzie najbardziej korzystna. Chociaż dla układów modelowych, jak wykazano w pracy [24], wpływ zastosowanej długości cięciwy na wyznaczone wartości krzywizny okazał się nieistotny, to w eksploatowanym torze kolejowym, z uwagi na deformacje toru i błęd pomiarowy, sytuacja może się istotnie różnić. Świadczą o tym chociażby nieregularne wykresy krzywizny pokazane w pracy [31]. Przeanalizowano trzy testowe układy geometryczne dostosowane do prędkości 80 km/h, 120 km/h i 160 km/h (wyznaczone w wyniku przeprowadzonej estymacji krzywizny promienie łuków kołowych wynosiły odpowiednio około 410 m, 880 m i 1480 m). Rozpatrywano długości ruchomej cięciwy w zakresie 10÷50 m.

Na podstawie analiz jednoznacznie wykazano, że długość cięciwy przyjmowana do wyznaczania

krzywizny w eksploatowanym torze kolejowym powinna zależeć od wartości promienia łuku kołowego. Wirtualna cięciwa nie powinna być zbyt krótka; np. stosowanie długości cięciwy $l_c = 10$ m nie jest rozwiązaniem racjonalnym. Przy dużych promieniach łuku kołowego mało przydatna może się również okazać cięciwa $l_c = 20$ m; w takich przypadkach należy się liczyć z koniecznością stosowania cięciwy $l_c = 50$ m. Zaproponowano orientacyjne długości l_c w zależności od przedziału wartości R_{LK} , nic jednak nie stoi na przeszkodzie, żeby – kierując się powyższymi sugestiami – stosować również inne, pośrednie wartości l_c , gdyż najczęściej nie będzie to miało istotnego wpływu na dokładność uzyskiwanej krzywizny osi toru. Metoda ruchomej cięciwy jest pod tym względem bardzo elastyczna. Istnieje również możliwość przyjęcia innej (czyli nieco krótszej) cięciwy przy wyznaczaniu krzywizny na długości krzywej przejściowej niż ma to miejsce dla łuku kołowego. Często z wykresu krzywizny uzyskanego przy zastosowaniu krótszej cięciwy można dokładniej wyznaczyć położenie i długość krzywej przejściowej.

Przedstawione w artykule zagadnienia, dotyczące dostosowania metody ruchomej cięciwy do przyjętej procedury pomiarowej oraz sposobu wykorzystania uzyskanego wykresu krzywizny, stwarzają w opisanym metodzie odpowiednie podstawy aplikacyjne. Wdrożenie przedstawionej procedury powinno znacznie usprawnić proces identyfikacji układów geometrycznych toru w płaszczyźnie poziomej.

Literatura

1. Deutsche Bahn: 883.2000 DB_REF-Festpunktfeld, Deutsche Bahn Netz AG, Berlin, Germany, 2016.
2. European Committee for Standardization (CEN): *Railway applications -Track—Track alignment design parameters—Track gauges 1435 mm and wider. Part 1: Plain line. EN 13803-1*, Brussels, Belgium, 2010.
3. Federal Railroad Administration: *Code of federal regulations title 49 transportation*, US Government Printing Office, Washington, DC, 2008.
4. Network Rail: *NR/L3/TRK/0030 NR Reinstatement of Absolute Track Geometry (WCRL Routes), Iss. 1*, London, UK, 2008.
5. New South Wales: *Standard: Railway Surveying, Version 1.0. T HR TR 13000 ST, Government (Transport for NSW), Sydney, Australia, 2016*.
6. Österreichische Bundesbahnen: *Linienführung von Gleisen, B 50 – Oberbau – Technische Grundsätze. Teil 2*, GB Fahrweg Technik, Wien, Austria, 2004.
7. Standardy Techniczne – Szczegółowe warunki techniczne dla modernizacji lub budowy linii kolejowych do prędkości $V_{max} \leq 200$ km/h (dla taboru

- konwencjonalnego) / 250 km/h (dla taboru z wychylnym pudłem) – TOM I – DROGA SZYNOWA – Załącznik ST-T1-A6: Układy geometryczne torów, PKP Polskie Linie Kolejowe S.A., Warszawa, 2018.
8. Schweizerische Bundesbahnen: *Ausführungsbestimmungen zur Eisenbahnver-ordnung*. SR 742.141.11, Ministerium für Verkehr, Bern, Switzerland, 2016.
 9. Szwilski A.B. et.al.: *Employing HADGPS to survey track and monitor movement at curves*, In Proc. 8th Int. Conf. „Railway Engineering 2005”, London, UK, Engineering Technics Press, Edinburgh.
 10. Li W. et.al.: *A method for automatically recreating the horizontal alignment geometry of existing railways*, Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering, vol. 34, iss. 1/2019. pp. 71–94, Wiley Online Library.
 11. Pu H. et.al.: *A global iterations method for recreating railway vertical alignment considering multiple constraints*, IEEE Access, vol. 7, iss. 1/2019, pp. 121199–121211, Institute of Electrical and Electronics Engineers.
 12. *A guide to using IMU (accelerometer and gyroscope devices) in embedded applications*, Starlino Electronics, 2009, Web side: http://www.starlino.com/imu_guide.html.
 13. Guimarães-Steinicke C. et.al.: *Chapter Four – Terrestrial laser scanning reveals temporal changes in biodiversity mechanisms driving grassland productivity*, Advances in Ecological Research, vol. 61, 2019, pp. 133–161, Academic Press.
 14. Alkan R.M.: *Cm-level high accurate point positioning with satellite-based GNSS correction service in dynamic applications*, Journal of Spatial Science, vol. 66, iss. 2/2019, pp. 351–359, Taylor & Francis.
 15. Chang, L. et.al.: *Railway infrastructure classification and instability identification using Sentinel-1 SAR and Laser Scanning data*, Sensors, vol. 20, iss. 24/2020, 7108, Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
 16. Quan, Y., Lau L.: *Development of a trajectory constrained rotating arm rig for testing GNSS kinematic positioning*, Measurement, vol. 140, 2019, pp. 479–485, Elsevier.
 17. Wang, L. et.al.: *Validation and assessment of multi-GNSS real-time precise point positioning in simulated kinematic mode using IGS real-time service*, Remote Sensing, vol. 10, iss. 2/2018, 337, Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
 18. Wu S. et.al.: *Improving ambiguity resolution success rate in the joint solution of GNSS-based attitude determination and relative positioning with multivariate constraints*, GPS Solution, vol. 24, iss. 1/2020, 31, Springer.
 19. Koc W.: *Design of rail-track geometric systems by satellite measurement*, Journal of Transportation Engineering, vol. 138, iss. 1/2012, pp. 114–122, American Society of Civil Engineers.
 20. Koc W.: *Analytical method of modelling the geometric system of communication route*, Mathematical Problems in Engineering, vol. 2014, 679817, Hindawi Publishing Corporation.
 21. Koc W.: *Design of compound curves adapted to the satellite measurements*, The Archives of Transport, vol. 34, iss. 2/2015, pp. 37–49, Polska Akademia Nauk, Komitet Transportu.
 22. Koc W.: *Design of reverse curves adapted to the satellite measurements*, Advances in Civil Engineering, vol. 2016, 6503962, Hindawi Publishing Corporation.
 23. Koc W.: *The method of determining horizontal curvature in geometrical layouts of railway track with the use of moving chord*, Archives of Civil Engineering, vol. 66, iss. 4/2020, pp. 579–591, Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Łądowej.
 24. Koc W.: *Analysis of the effectiveness of determining the horizontal curvature of a track axis using a moving chord*, Problemy Kolejnictwa, 2021, z. 190, s. 77–86.
 25. Koc W.: *Analysis of moving chord inclination angles when determining curvature of track axis*, Current Journal of Applied Science and Technology, vol. 40, iss. 10/2021, pp. 92–103, Article no. CJASt.68309, SCIENDOMAIN International.
 26. Koc W.: *Estimation of the horizontal curvature of the railway track axis with the use of a moving chord based on geodetic measurements*, Journal of Surveying Engineering, vol. 148, iss. 4/2022, 04022007, American Society of Civil Engineers.
 27. Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 15 października 2012 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych, Dz.U., 2012, poz. 1247.
 28. Moritz H.: *Geodetic Reference System 1980*, Bulletin Géodésique, vol. 54, iss. 3/1980, pp. 395–405, Springer Link.
 29. Turiño C.E.: *Gauss Krüger projection for areas of wide longitudinal extent*, International Journal of Geographical Information Science, vol. 22, iss. 6/2008, pp. 703–719, Taylor & Francis Online.
 30. Koc W.: *Identification of geometrical parameters of an operational railway route determined by the curvature of the track axis*, European Journal of Applied Sciences, vol. 10, iss. 5/2022, pp. 129–148, Services for Science and Education, United Kingdom.
 31. Koc W. et.al.: *Determining horizontal curvature of railway track axis in mobile satellite measurements*, Bulletin of Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, iss. 6/2021, e139204, Polska Akademia Nauk.