

# Określanie kąta kierunkowego trasy i krzywizny osi toru na kolejach dużych prędkości

Władysław KOC<sup>1</sup>

## Streszczenie

W artykule opisano założenia dotyczące dwóch nowych metod obliczeniowych: określania kąta kierunkowego trasy kolejowej oraz wyznaczania krzywizny osi toru. Metody te wykorzystują dane pomiarowe w postaci współrzędnych kartezjańskich osi toru (uzyskiwane w trakcie procesu inwentaryzacyjnego), podstawę obliczeń zaś stanowi identyfikacja wirtualnej cięciwy wystawionej w płaszczyźnie poziomej, która łączy ze sobą dwa punkty na osi toru. Główną rolę odgrywa tutaj wyznaczone nachylenie stycznej do osi toru. Następnie podjęto próbę sprawdzenia, w jakim stopniu te metody odpowiadają uwarunkowaniom występującym na kolejach dużych prędkości. Zaprezentowano to na dwóch przykładach obliczeniowych, obejmujących układy geometryczne dla prędkości 260 km/h i 350 km/h. Aby w większym stopniu zachować możliwości odnoszenia się do rzeczywistości, postanowiono uzyskać hipotetyczne dane pomiarowe przez wirtualne zdeformowanie tych układów. Pod względem jakościowym wyniki przeprowadzonej analizy nie różniły się niczym od wcześniejszych analiz odnoszących się do kolei konwencjonalnych. Potwierdziły one w sposób bezdyskusyjny przydatność rozpatrywanych metod do określania kąta kierunkowego trasy i wyznaczania krzywizny osi toru na kolejach dużych prędkości. Jak wykazano, do stosowania na tych kolejach należałoby rekomendować cięciwę o długości  $l_c = 100$  m.

**Słowa kluczowe:** droga kolejowa, koleje dużych prędkości, kąt kierunkowy trasy, krzywizna osi toru, algorytmy obliczeniowe, przykładowe układy geometryczne

## 1. Wprowadzenie

Obchodząc jubileusz 100-lecia badań kolejowych prowadzonych w Polsce, nie można pomijać podstawowego ograniczenia jakim jest brak funkcjonującego systemu kolei dużych prędkości. Koleje te wyznaczają światowy poziom techniki w zakresie kolejnictwa, a ponadto – jak się powszechnie uważa – świadczą o wysokim poziomie cywilizacyjnym. Patrząc z perspektywy innych krajów (z którymi identyfikujemy się), opisane zapóźnienie trwa w Polsce już od kilkudziesięciu lat, a możliwości zmiany tej sytuacji są wciąż nie do końca określone. Ma to również wpływ na realizowaną tematykę badawczą z powodu braku kluczowego obiektu badań.

Nie oznacza to oczywiście, że w Polsce nie mogą być prowadzone prace badawcze przydatne z punktu widzenia kolei dużych prędkości. Kolejnictwo jest tak szeroką dziedziną, że można w nim wyodrębnić zakresy tematyczne, które mają charakter uniwersalny i dotyczą nie tylko kolei konwencjonalnych. Jak się wydaje, dotyczy to zwłaszcza zasad projektowania

układów geometrycznych toru oraz szeroko pojętej diagnostyki utrzymaniowej tychże układów.

Niezależnie od tego, czy są to koleje tradycyjne, czy koleje dużych prędkości, kształt istniejących torów kolejowych ulega stopniowym zmianom w trakcie wieloletniej eksploatacji. Po pewnym czasie tor zaczyna odbiegać od swojego układu pierwotnego, zaprojektowanego zgodnie z obowiązującymi przepisami. Szczególnie niekorzystne mogą się okazać odchylenia osi toru w płaszczyźnie poziomej, dlatego należy znać aktualne ukształtowanie geometryczne trasy, aby można było eliminować występujące nieprawidłowości i wprowadzać ewentualne korekty. Służą temu odpowiednie systemy pomiarowe i algorytmy obliczeniowe.

Stosowane obecnie metody pomiarowe są podobne w różnych zarządach kolejowych [4, 5, 8, 24, 32]. Oprócz klasycznych technik geodezyjnych, stosuje się stacjonarne pomiary satelitarne oparte na technice Global Navigation Satellite System (GNSS), które wykorzystują tzw. aktywne sieci geodezyjne. Wprowadzane są również metody mobilnych pomiarów

<sup>1</sup> Prof. dr hab. inż.; Politechnika Gdańska, Katedra Inżynierii Transportowej; e-mail: kocwl@pg.edu.pl.

satelitarnych [31], w których obok odbiorników GNSS są często wykorzystywane – jako wspomagające – urządzenia Inertial Navigation System (INS) [1] oraz metody wizyjne, takie jak Terrestrial Laser Scanning (TLS) [10]. Trwają badania możliwości zastosowania układów złożonych z odbiorników satelitarnych montowanych na różnych typach pojazdów [26, 34].

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów staje się możliwa identyfikacja danej trasy. Polega ona na określeniu jej parametrów geometrycznych przez wykorzystanie wyznaczonych współrzędnych kartezjańskich punktów osi toru w odpowiednim państwowym systemie odniesień przestrzennych. Przykładowo, w Polsce – w odniesieniu do współrzędnych płaskich – obowiązuje układ PL-2000 [27]. Układ ten utworzono na podstawie przyporządkowania punktów na elipsoidzie odniesienia GRS 80 [23] odpowiednim punktom na płaszczyźnie, zgodnie z teorią odwzorowania Gaussa-Krügera [33]. Z matematycznego punktu widzenia to przyporządkowanie ma charakter jednoznaczny.

Obecne podejście do problemu identyfikacji pomierzonej trasy kolejowej polega na wygenerowaniu w danym obszarze zoptymalizowanego układu geometrycznego, przez zminimalizowanie występujących odchyżeń tegoż układu od punktów pomiarowych (przy spełnieniu odpowiednich wymagań utrzymaniowych i eksploatacyjnych). Tradycyjne rozwiązanie problemu projektowego w dużym stopniu opiera się na ludzkim doświadczeniu [18, 35]. W wielu pracach są podejmowane próby zautomatyzowania omawianego procesu. Występują przy tym dwa warianty postępowania: identyfikacja geometryczna [9, 19, 22, 25] i optymalizacja wyrównania [3, 6, 7, 28–30]. W pracach [2, 20, 21] zaproponowano kilka metod łączenia tych wariantów w iteracyjny proces odtworzenia osi toru. Jest rzeczą charakterystyczną, że większość wymienionych prac w ostatnich latach została opracowana przez naukowców chińskich, zatem niewątpliwie odnoszą się one do uwarunkowań występujących na kolejach dużych prędkości.

Jak się okazuje, do problemu identyfikacji geometrycznej osi toru kolejowego można podejść w zupełnie inny sposób, odchodząc od dopasowywania hipotetycznego układu modelowego do punktów osi toru wyznaczonych na drodze pomiarów bezpośrednich. Podstawę identyfikacji może stanowić krzywizna układu geometrycznego, należałoby tylko opracować odpowiednią metodę jej wyznaczania. W pracach [12, 15, 16] przedstawiono propozycję nowej metody wyznaczania krzywizny osi toru, określonej mianem „metody ruchomej cięciwy”.

Jednak w każdym przypadku identyfikacja układu geometrycznego osi toru odbywa się na podstawie współrzędnych kartezjańskich, które zostały wyznaczone w terenowych pomiarach. Najczęściej są to

pomiary wykorzystujące naziemną osnowę pomiarową, chociaż coraz większą popularność zyskują pomiary GNSS, prowadzone w sposób statyczny lub mobilny. Jak się wydaje, najbardziej efektywną metodę wyznaczania współrzędnych osi toru kolejowego stanowią mobilne pomiary satelitarne. Metoda ta jest zdecydowanie najszybsza i najmniej pracochłonna, dostarcza nieporównywalną z innymi metodami liczbę danych pomiarowych. Mniejsze rozpowszechnienie tej metody wynika zapewne z nie do końca wyjaśnionej kwestii jej dokładności.

Występują jednak sytuacje, kiedy sygnał satelitarny może zostać zakłócony (przez występujące przesłony terenowe) lub też całkowicie zaniknąć (np. w tunelach). Wówczas z pomocą przychodzi możliwość zmierzenia wartości kąta kierunkowego trasy  $\Phi$  za pomocą systemu inercyjnego. Znajomość tego kąta, wraz z jednoczesnym pomiarem odległości  $\Delta L$ , pozwala na wyznaczenie współrzędnych kartezjańskich kolejnego punktu pomiarowego (znając współrzędne punktu poprzedniego). Dla układu PL-2000 obowiązują wzory:

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta L \cdot \cos \Phi_{i+i+1} \quad (1)$$

$$X_{i+1} = X_i + \Delta L \cdot \sin \Phi_{i+i+1} \quad (2)$$

W tej sytuacji kąt kierunkowy trasy może być również wykorzystywany w procesie identyfikacji geometrycznej osi toru kolejowego.

W artykule podjęto próbę sprawdzenia w jakim stopniu kolejom dużych prędkości odpowiadają ostatnio opracowane metody wyznaczania kąta kierunkowego trasy i krzywizny osi toru. Metody są oparte na dwóch podstawowych zasadach:

- wykorzystują dane pomiarowe w postaci współrzędnych kartezjańskich osi toru uzyskiwane w trakcie procesu inwentaryzacyjnego,
- podstawę obliczeń stanowi identyfikacja wirtualnej cięciwy wystawionej w płaszczyźnie poziomej, która łączy ze sobą dwa punkty na osi toru.

## 2. Metoda wyznaczania kąta kierunkowego trasy

### 2.1. Definicja kąta kierunkowego

Koncepcja kąta kierunkowego jest szczególnie aktualna w dziedzinie tradycyjnej żeglugi morskiej oraz w żegludze powietrznej. W żegludze morskiej występuje określenie tzw. linii średnicowej, czyli wyimaginowanej linii łączącej dziób i rufę jednostki pływającej, usytuowanej w płaszczyźnie symetrii statku. Linia

średnicowa nie ma określonej wysokości w tej płaszczyźnie, ale jest równoległa do horyzontu. Ma to bezpośredni związek z pojęciem kursu, czyli kierunku (poziomego), w którym statek jest sterowany lub powinien być sterowany. Kurs wyznacza się jako miarę kąta (w stopniach, zgodnie z ruchem wskazówek zegara) od północnego kierunku odniesienia. Interesujący nas kurs rzeczywisty (TC – ang. *true course*) to kąt pomiędzy prawdziwą północą (południkiem geograficznym) a przednią częścią linii średnicowej statku.

Łatwo zauważyć, że pojęcie linii średnicowej można zastosować także do osi podłużnej wagonu kolejowego, wyznaczonej przez linię łączącą czopy skrzyżowania wózków lub zestawów kołowych. Kąt nachylenia linii średnicowej względem kierunku północnego można zatem traktować jako kąt kierunkowy (tj. kurs) pojazdu szynowego. Na odcinkach prostych trasy linia średnicowa wagonu pokrywa się z osią toru kolejowego, a na łukach jest równoległa do prostej stycznej do osi toru. Kąt kierunkowy pojazdu szynowego jest ściśle związany z kierunkiem jego poruszania się po danej linii kolejowej (wyznacza on kurs wagonu wyrażony w stopniach).

Kąt kierunkowy szlaku komunikacyjnego wyznacza się na mapie topograficznej jako kąt pomiędzy kierunkiem nachylenia stycznej do układu geometrycznego a kierunkiem odniesienia, którym jest kierunek północny. Wartości kąta kierunkowego w danym punkcie trasy kolejowej wynikają z kąta nachylenia stycznej do osi toru w tym punkcie. Na odcinkach prostych styczna ta pokrywa się z osią toru, zatem można ją łatwo wyznaczyć na drodze pomiarów geodezyjnych, określając odpowiednie współrzędne kartezjańskie [17]. Na odcinkach łukowych (czyli na krzywych przejściowych i łukach kołowych) sprawa jest już bardziej skomplikowana, gdyż bezpośrednie wyznaczenie stycznych jest tutaj utrudnione.

Należy jeszcze zauważyć, że kąt kierunkowy pojazdu szynowego jest ściśle związany z kierunkiem jego poruszania się po danej linii kolejowej, natomiast linia kolejowa nie ma tak określonego kierunku. Należy zatem taki kierunek przyjąć, pamiętając że będzie on miał charakter umowny. Jak się wydaje, dla zachowania jednoznaczności kąta kierunkowego trasy najbardziej korzystne będzie dostosowanie się do narastającego kilometrażu linii kolejowej.

W każdym razie występuje konieczność opracowania skutecznej metody wyznaczenia zarówno kąta kierunkowego linii kolejowej, jak też kąta kierunkowego pojazdu szynowego na podstawie odpowiednich danych pomiarowych. Tymi ostatnimi powinny być współrzędne kartezjańskie osi toru, umożliwiające wizualizację danej trasy kolejowej i uzyskanie ogólnej orientacji o jej przebiegu. Przedstawiona propozycja rozwiązania postawionego problemu nawiązuje do założeń przyjmowanych w nowej metodzie

wyznaczania krzywizny osi toru kolejowego z wykorzystaniem ruchomej cięciwy [12, 15, 16].

## 2.2. Podstawowe zależności

Jeśli przez  $\Theta_i$  oznaczymy kąt nachylenia stycznej do osi toru w układzie współrzędnych prostokątnych, to z wartości tego kąta wynika w sposób bezpośredni kąt kierunkowy trasy  $\Phi_i$  w danym punkcie  $i$ . Aby go uzyskać, potrzebna jest prosta transformacja polegająca na wyrażeniu kąta  $\Theta_i$  w stopniach i zastosowaniu odpowiedniego wzoru. Dla  $\Theta_i \in \langle 0; 90^\circ \rangle$ ,  $\Theta_i \in \langle 0; -90^\circ \rangle$  i  $\Theta_i \in \langle -90^\circ; -180^\circ \rangle$  obowiązuje wzór:

$$\Phi_i = 90^\circ - \Theta_i \quad (3)$$

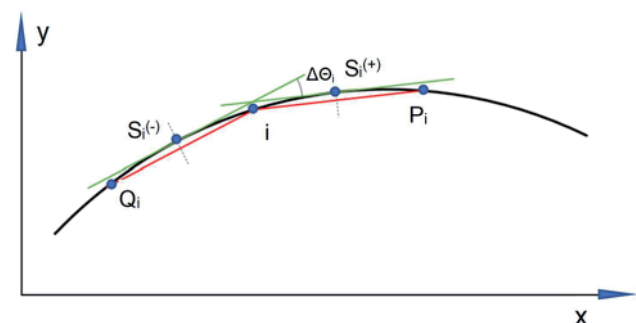
natomiast dla  $\Theta_i \in \langle 90^\circ; 180^\circ \rangle$

$$\Phi_i = 360^\circ + (90^\circ - \Theta_i) \quad (4).$$

## 2.3. Przyjęte założenia

Podstawowym problemem do rozwiązania pozostaje zatem wyznaczenie wartości  $\Theta_i$  kąta nachylenia stycznej w danym punkcie. Do tego celu można wykorzystać cięciwę o określonej długości rozciągniętą wzdłuż toru, jak ma to miejsce przy wyznaczaniu krzywizny osi toru metodą ruchomej cięciwy [12, 15, 16].

W tej metodzie podstawowym zadaniem procedury wyznaczenia krzywizny w punkcie pomiarowym  $i$  – na podstawie wyznaczonych współrzędnych kartezjańskich – jest określenie wartości kątów nachylenia dwóch wirtualnych cięciw (wyprowadzonych z tego punktu do przodu i do tyłu) do osi odciętych odpowiedniego układu współrzędnych prostokątnych. Pokazano to na rysunku 1 (dla odcinka łuku kołowego).



Rys. 1. Schemat ideowy wyznaczenia kątów nachylenia ruchomej cięciwy [opracowanie własne]

W omawianej metodzie przyjęto dwa kluczowe założenia:

- (1) *Proste styczne do osi toru i odpowiadające im cięciwy są do siebie równoległe;*
- (2) *Punkty styczności rzutują się prostopadle na środek danej cięciwy.*

Założenia te są spełnione dla łuku kołowego. Jednak na długości krzywej przejściowej już tak nie jest, przy czym niezgodność wynikająca z niespełnienia – w sposób ścisły – tych warunków jest stosunkowo niewielka; maleje ona w miarę przechodzenia do regionu początkowego krzywej przejściowej.

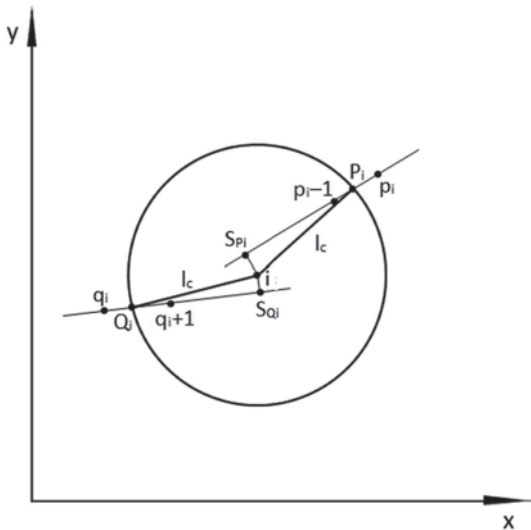
Kąty nachylenia obydwu cięciw (przedniej  $\Theta_i^{(+)}$  i tylnej  $\Theta_i^{(-)}$ ) nie dotyczą danego punktu pomiarowego, lecz punktów oddalonych od punktu  $i$  o wartość odpowiadającą połowie długości cięciwy. Aby móc utworzyć wykresy zależności  $\Theta(L)$  należałoby wyznaczyć – odrębnie dla każdej z cięciw – współrzędne liniowe tych punktów, co wymagałoby przeprowadzenia dodatkowej procedury obliczeniowej. Jak się okazuje, nie ma jednak takiej potrzeby, gdyż hipotetyczny kąt nachylenia  $\Theta_i$  stycznej w punkcie  $i$  można wyznaczyć w inny, znacznie prostszy sposób, wykorzystując wartości kątów nachylenia obu wirtualnych cięciw.

Przyjmując jako podstawę obliczeń wyznaczone wartości kątów  $\Theta_i^{(+)}$  i  $\Theta_i^{(-)}$  założono, że kąt nachylenia  $\Theta_i$  stycznej w punkcie  $i$  stanowi wartość średniej arytmetycznej tychże kątów.

$$\Theta_i = \frac{\Theta_i^{(+)} + \Theta_i^{(-)}}{2} \quad (5)$$

## 2.4. Algorytm obliczeniowy

Metodyka określania wartości kątów  $\Theta_i^{(+)}$  i  $\Theta_i^{(-)}$  w dowolnym punkcie pomiarowym została wyjaśniona w sposób szczegółowy w pracach [13, 16], dotyczących sposobu wyznaczania krzywizny osi toru. Sekwencja prowadzonych w tym celu działań została zilustrowana na rysunku 2.



Rys. 2. Wyjaśnienie sposobu wyznaczenia danych do określenia wartości kątów nachylenia wirtualnych cięciw wyprowadzonych z punktu  $i$  [opracowanie własne]

Procedurę wyznaczenia danych do określenia wartości kątów  $\Theta_i^{(+)}$  i  $\Theta_i^{(-)}$  rozpoczynamy od punktu pomiarowego  $i$ , który jest tak uytuowany, że umożliwia wystawienie wirtualnej cięciwy o długości  $l_c$  do tyłu; koniec obliczeń musi nastąpić w takim punkcie, z którego można jeszcze wystawić wirtualną cięciwę o tej samej długości do przodu. Podstawową operacją, jaką trzeba najpierw przeprowadzić, jest ustalenie numeracji punktów wyznaczających przedziały, w których znajdują się końce wirtualnych cięciw wyprowadzonych z punktu  $i$ .

Dla cięciwy wyprowadzonej z punktu  $i$  do przodu, przedział w którym występuje koniec cięciwy wyznaczają punkty  $p_{i-1}$  oraz  $p_i$  (rys. 1). Po ich określeniu istnieje możliwość analitycznego zapisu równania prostej przechodzącej przez te punkty. Równanie to ma następującą postać ogólną:

$$y = a_{p_i} + b_{p_i} x. \quad (6)$$

Jak widać na rysunku 1, szukany koniec przedniej cięciwy (tj. punkt  $P_i$ ) leży na prostej opisanej równaniem (6), w odległości  $l_c$  od punktu  $i$ . Stanowi więc punkt przecięcia okręgu o promieniu  $l_c$  i środku w punkcie  $i$  z prostą (6). Współrzędne punktu  $P_i$  wyznacza się z następujących wzorów:

$$x_{p_i} = \frac{-B_{p_i} \pm \sqrt{B_{p_i}^2 - 4A_{p_i}C_{p_i}}}{2A_{p_i}} \quad (7)$$

$$y_{p_i} = a_{p_i} + b_{p_i} \frac{-B_{p_i} \pm \sqrt{B_{p_i}^2 - 4A_{p_i}C_{p_i}}}{2A_{p_i}} \quad (8)$$

gdzie:

$$A_{p_i} = 1 + b_{p_i}^2$$

$$B_{p_i} = -2(x_{s_{p_i}} + b_{p_i} y_{s_{p_i}} - a_{p_i} b_{p_i})$$

$$C_{p_i} = x_{s_{p_i}}^2 + y_{s_{p_i}}^2 - 2a_{p_i} y_{s_{p_i}} + a_{p_i}^2 - l_c^2 + \left[ (x_i - x_{s_{p_i}})^2 + (y_i - y_{s_{p_i}})^2 \right]$$

$$x_{s_{p_i}} = \frac{b_{p_i}}{1 + b_{p_i}^2} \left( y_i + \frac{1}{b_{p_i}} x_i - a_{p_i} \right)$$

$$y_{s_{p_i}} = \frac{1}{1 + b_{p_i}^2} (b_{p_i}^2 y_i + b_{p_i} x_i + a_{p_i}).$$

Znak „+” we wzorach (7) i (8) występuje wówczas, gdy wartości odciętych pomierzonych punktów trasy mają charakter narastający, natomiast znak „-” łączy punkty, które mają charakter malejący.

Dla cięciwy wyprowadzonej z punktu  $i$  do tyłu, przedział w którym występuje koniec cięciwy wyznaczają punkty  $q_i$  oraz  $q_{i+1}$  (rys. 1). Wyznacza się go w sposób analogiczny, jak miało to miejsce w przypadku cięciwy wyprowadzonej do przodu. Dalszy tok postępowania jest również podobny i prowadzi do uzyskania współrzędnych punktu  $Q_i$ .

Disponując współrzędnymi kartezjańskimi punktu  $i$  (uzyskanymi z pomiarów), a także współrzędnymi końców wirtualnych cięciw wyprowadzonych do przodu i do tyłu, można wyznaczyć wartości kątów nachylenia tych cięciw  $\Theta_i^{(+)}$  i  $\Theta_i^{(-)}$ , a następnie szukaną wartość kąta nachylenia stycznej w danym punkcie pomiarowym. Cięciwa wyprowadzona do przodu łączy punkt  $i$  z punktem  $P_i$ , którego współrzędne są określone wzorami (7) i (8). Jej kąt nachylenia wynosi:

$$\Theta_{i \rightarrow P_i} = \Theta_i^{(+)} = \arctan \frac{y_{P_i} - y_i}{x_{P_i} - x_i} \quad (9)$$

Cięciwa wyprowadzona do tyłu łączy punkt  $i$  z punktem  $Q_i$ . Jej kąt nachylenia wynosi:

$$\Theta_{Q_i \rightarrow i} = \Theta_i^{(-)} = \arctan \frac{y_i - y_{Q_i}}{x_i - x_{Q_i}} \quad (10)$$

W tej sytuacji wartość kąta nachylenia stycznej w danym punkcie pomiarowym wyznacza się za pomocą wzoru (5). Przedstawiony tok postępowania ma charakter sekwencyjny i polega na wykorzystaniu podanych wzorów obliczeniowych. Wyznaczanie wartości kąta kierunkowego nie wymaga opracowania specjalnych programów komputerowych, a całą operację można przeprowadzić np. w arkuszu kalkulacyjnym.

Szczegółowa analiza przeprowadzona w pracy [11] poświadczyła w sposób jednoznaczny bardzo wysoką precyzję proponowanej metody wyznaczania kąta kierunkowego trasy oraz brak przy tym istotnego znaczenia przyjmowanej długości wirtualnej cięciwy.

### 3. Metoda wyznaczania krzywizny osi toru

Uwzględniając definicję krzywizny, wynikającą ze wzoru

$$\kappa = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \Theta}{\Delta l} \right| = \frac{d\Theta}{dl} \quad (11)$$

dla sytuacji przedstawionej na rysunku 1 można sformułować następujący wzór do praktycznego wykorzystania:

$$\tilde{\kappa}_i = \frac{\Delta \Theta_i}{S_i^{(-)} S_i^{(+)}} \quad (12)$$

We wzorze (12) wyrażenie  $\Delta \Theta_i = \Theta_i^{(+)} - \Theta_i^{(-)}$  oznacza różnicę kątów nachylenia stycznych do układu geometrycznego, wystawionych w punktach  $S_i^{(-)}$  i  $S_i^{(+)}$ , zaś  $S_i^{(-)} S_i^{(+)}$  jest odległością pomiędzy tymi punktami mierzoną po osi toru.

O ile znajomość współrzędnych kartezjańskich pozwala na łatwe wyznaczenie różnicy kątów  $\Delta \Theta_i$ , nie dotyczy to określania odległości  $S_i^{(-)} S_i^{(+)}$ . W przypadku łuku kołowego można ją wyznaczyć ze wzoru

$$\widehat{S_i^{(-)} S_i^{(+)}} = 2 \cdot R \cdot \arcsin \frac{l_c}{2R}, \quad (13)$$

jednak z praktycznego punktu widzenia wzór ten jest mało przydatny, gdyż wartość promienia łuku  $R$  nie jest znana. W tej sytuacji stosowanie metody ruchomej cięciwy wymaga przyjęcia, oprócz podanych w podrozdziale 2.3, trzeciego dodatkowego założenia:

**(3) występującą w danym punkcie i krzywiznę  $\kappa_i$  wyznacza się z następującego wzoru:**

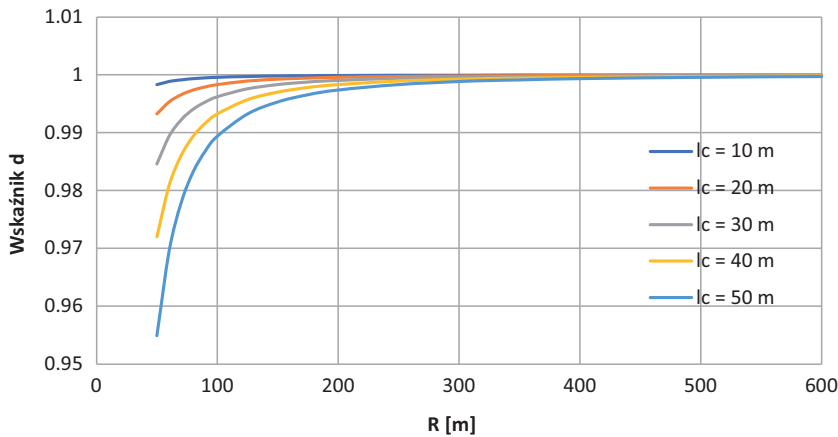
$$\kappa_i = \frac{\Delta \Theta_i}{l_c} \quad (14)$$

Nie ulega najmniejszej wątpliwości, że w przypadku odcinków łukowych wartości krzywizny uzyskane za pomocą wzorów (12) i (14) muszą się różnić, bowiem w każdym przypadku obowiązuje warunek  $\widehat{S_i^{(-)} S_i^{(+)}} > l_c$ . Założenie (3) oznacza zatem ograniczenie zakresu stosowalności omawianej metody wyznaczania krzywizny; przyjmowane w niej założenia dotyczą – ogólnie rzecz biorąc – tylko pewnego, ograniczonego zakresu parametrów geometrycznych.

Aby określić zakres stosowalności metody ruchomej cięciwy, wprowadzono wskaźnik liczbowy

$$d = \frac{l_c}{\widehat{S_i^{(-)} S_i^{(+)}}} \quad (15)$$

służący porównaniu ze sobą wartości występujących w mianowniku wzorów (12) i (14). Było to możliwe dla łuku kołowego, gdzie odległość  $\widehat{S_i^{(-)} S_i^{(+)}}$  wynika ze wzoru (13). Na rysunku 3 przedstawiono wykresy wskaźnika  $d$  obliczonego za pomocą wzoru (15) dla

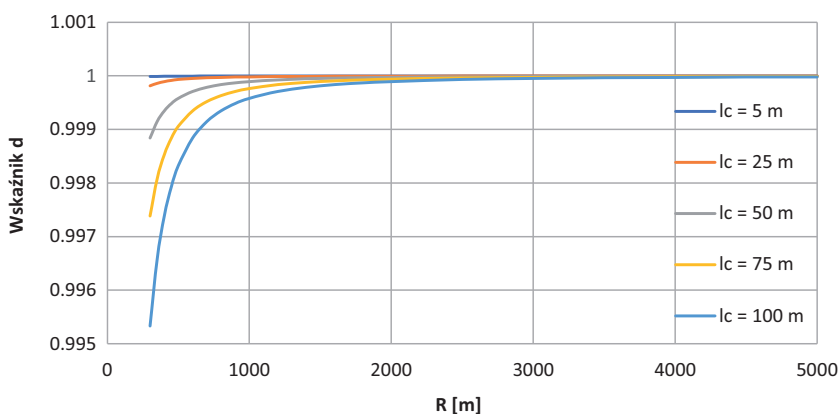


Rys. 3. Wykresy zależności  $d(R)$  dla różnych wartości  $l_c$  (przy  $R = 50 \div 600$  m) [opracowanie własne]

promieni łuków kołowych w zakresie  $R = 50 \div 600$  m, przy długościach ruchomej cięciwy  $l_c = 10 \div 50$  m.

Jak widać, wartości przyjętego wskaźnika  $d$  maleją (czyli tym bardziej różnią się od jedności), im mniejszy jest promień łuku kołowego i większa długość zastosowanej cięciwy. Jednocześnie wykresy na rysunku 3 w pełni wyjaśniają kwestię stosowalności opisanej metody. Jak się okazuje, metoda ruchomej cięciwy w pełni odpowiada warunkom występującym na drogach kolejowych. Promienie łuków kołowych  $R \leq 300$  m są tutaj stosowane w zasadzie jedynie w rozjazdach, ewentualnie na liniach górskich. W typowych sytuacjach są one znacznie większe, aby – w zależności od kategorii danej linii – nie ograniczać prędkości jazdy pociągów.

Na rysunku 4 zostały przedstawione wykresy zależności  $d(R)$  dla typowego zakresu promieni występujących na drogach kolejowych, z uwzględnieniem sytuacji pojawiających się na kolejach dużych prędkości. Na pierwszy rzut oka, rysunek ten jest podobny do rysunku 3, jednak – jak się okazuje – wartości na osi rzędnych są tutaj o jeden rząd mniejsze.



Rys. 4. Wykresy zależności  $d(R)$  dla promieni łuków kołowych występujących na drogach kolejowych (tj.  $R = 300 \div 5000$  m) i długości cięciwy  $l_c = 5 \div 100$  m [opracowanie własne]

Oznacza to, że w praktyce długości  $\widehat{S_i^{(-)} S_i^{(+)}}$  mierzone po łuku są prawie takie same jak długości odpowiadającej cięciwy. Dla kolei dużych prędkości (tj. dla  $R > 3000$  m) kwestia ta nie może budzić najmniejszych wątpliwości.

Rozważania te w znacznym stopniu wyjaśniają, dlaczego przedstawione w opracowaniach [12, 13, 16] przypadki wyznaczania krzywizny metodą ruchomej cięciwy w eksploatowanym torze zakończyły się pełnym powodzeniem. Jak widać, poprawność zaproponowanej metody ma mocne podstawy teoretyczne.

#### 4. Wybrane przykłady obliczeniowe

Możliwości zastosowania obydwu zaproponowanych metod obliczeniowych na kolejach dużych prędkości zostały zaprezentowane na dwóch przykładach obliczeniowych. Wykorzystano w tym celu modelowe układy geometryczne torów utworzone według zasad analitycznej metody projektowania [14]. Poszczególne elementy tych układów są opisane za

pomocą równań matematycznych, co w znacznym stopniu ułatwia prowadzenie odpowiedniej analizy.

Aby zachować możliwości odnoszenia się w większym stopniu do rzeczywistości, postanowiono uzyskać hipotetyczne dane pomiarowe przez wirtualne zdeformowanie układów modelowych. Współrzędne osi toru zostały skorygowane losowo w odstępach co 5 m, przyjmując wartość błędu maksymalnego  $\pm 10$  mm. Wyznaczanie kąta kierunkowego trasy oraz krzywizny osi toru przeprowadzono dla długości cięciwy  $l_c = 50$  m i  $l_c = 100$  m.

#### 4.1. Układ geometryczny dla prędkości 260 km/h

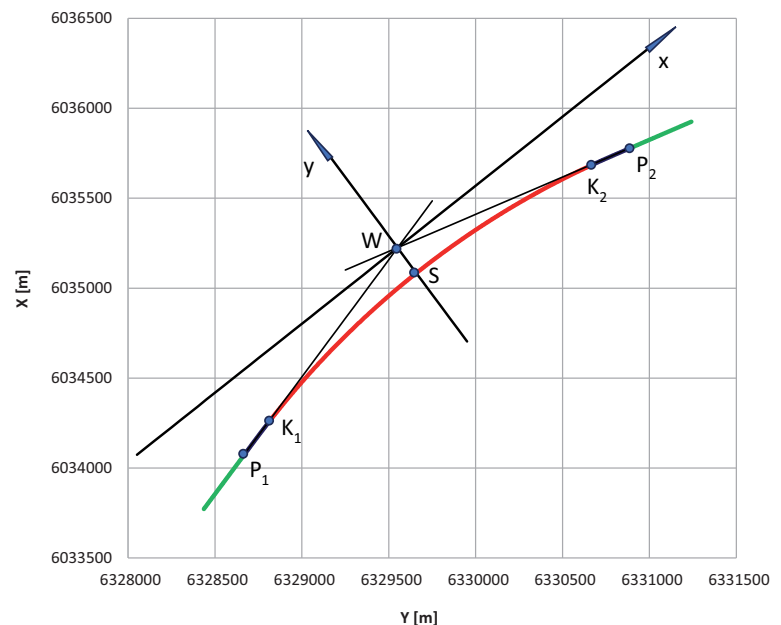
Pierwszy układ geometryczny, przystosowany do prędkości 260 km/h, składa się z łuku kołowego o promieniu 5000 m, dwóch krzywych przejściowych w postaci klotoidy o długości 240 m oraz dwóch odcinków prostych o długości około 370 m. Całkowita długość układu wynosi 3600 m, przy kącie zwrotu trasy  $\alpha = 0,523599$  rad. Jego usytuowanie w układzie PL-2000 pokazano na rysunku 5. Łuk kołowy został oznaczony

kolorem czerwonym, krzywe przejściowe kolorem niebieskim, a odcinki proste kolorem zielonym.

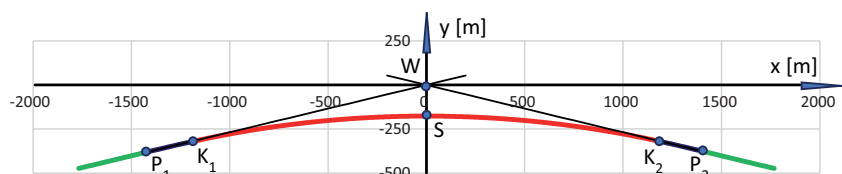
Na rysunku 5 zaznaczono osie lokalnego układu współrzędnych  $x, y$ , do którego nastąpi transformacja rozpatrywanego układu geometrycznego, zgodnie z procedurą opisaną w pracy [14]. Początek układu  $x, y$  zlokalizowano w punkcie przecięcia kierunków głównych trasy, ustawienie jego osi zaś pozwala uzyskać symetrię układu geometrycznego. Występujące na rysunku 5 oznaczenia są następujące:

- $W$  – punkt przecięcia kierunków głównych, początek lokalnego układu współrzędnych,
- $S$  – środek łuku kołowego,
- $P_1$  – początek pierwszej krzywej przejściowej,
- $K_1$  – koniec pierwszej krzywej przejściowej,
- $P_2$  – początek drugiej krzywej przejściowej,
- $K_2$  – koniec drugiej krzywej przejściowej.

W celu przeprowadzenia transformacji do lokalnego układu współrzędnych, należy przesunąć początek układu PL-2000 do punktu  $W$  i dokonać obrotu tego układu w lewo o kąt  $\beta = 0,654498$  rad. Otrzymuje się wówczas sytuację pokazaną na rysunku 6.



Rys. 5. Układ geometryczny dla prędkości 260 km/h w układzie PL-2000 [opracowanie własne]

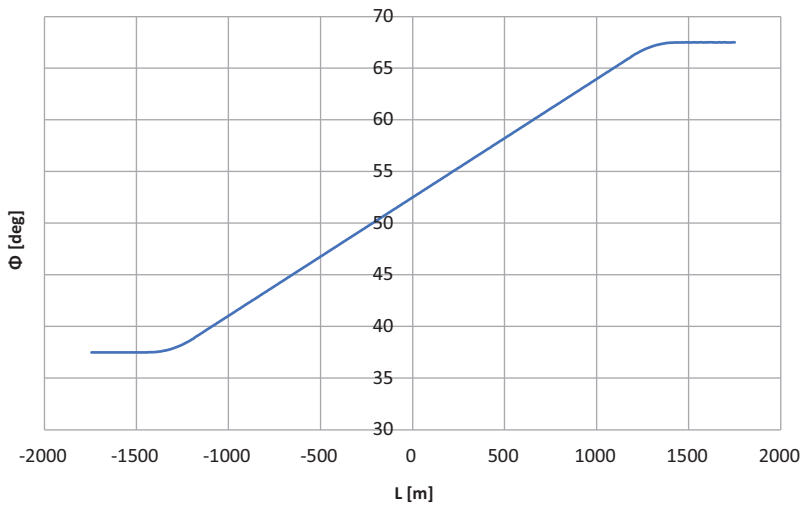


Rys. 6. Układ geometryczny dla prędkości 260 km/h w lokalnym układzie współrzędnych [opracowanie własne]

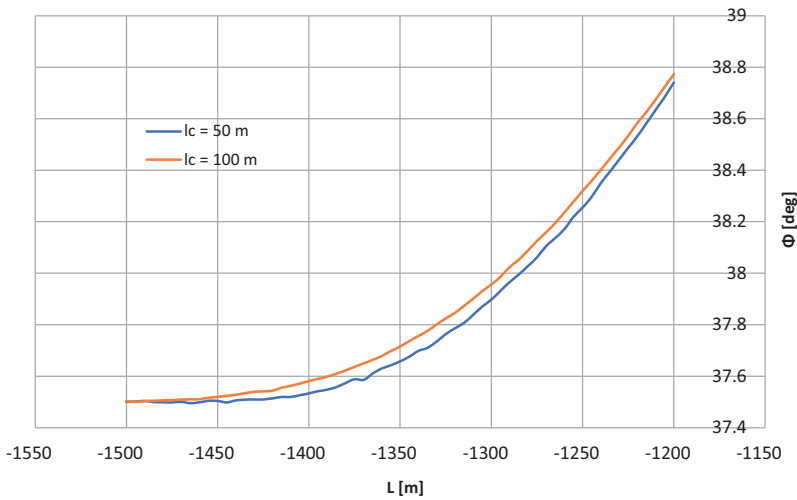
Po wirtualnym zdeformowaniu modelowego układu geometrycznego wyznaczono wartości kąta kierunkowego, przyjmując dwie długości cięciwy:  $l_c = 50$  m i  $l_c = 100$  m. Uzyskano wykresy  $\Phi(L)$ , które bez powiększenia skali niczym się między sobą nie różnią. Zostało to pokazane na rysunku 7.

Po powiększeniu skali wykresu ujawniają się pewne różnice kąta  $\Phi$  na krzywych przejściowych. Są one jednak niewielkie, nie przekraczają wartości  $0,1^\circ$ . Zostało to pokazane na rysunkach 8 i 9.

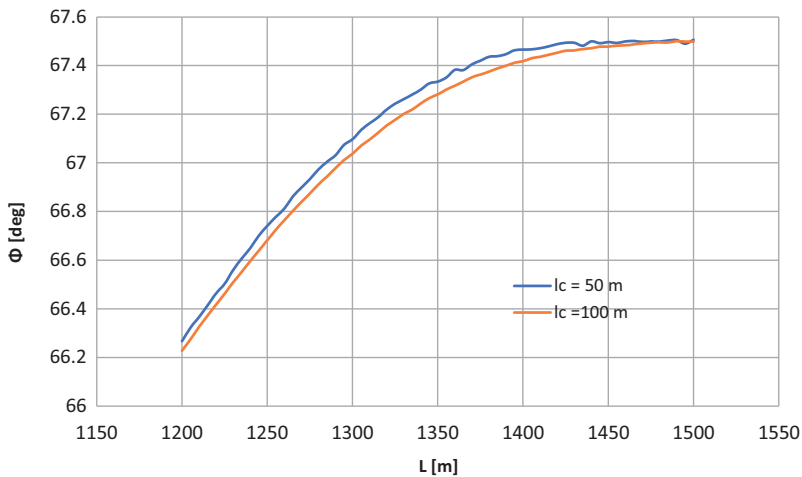
Jak się wydaje, wykres kąta kierunkowego uzyskany na długości krzywej przejściowej jest bardziej regularny



Rys. 7. Wykres kąta kierunkowego na długości układu geometrycznego dla prędkości 260 km/h [opracowanie własne]



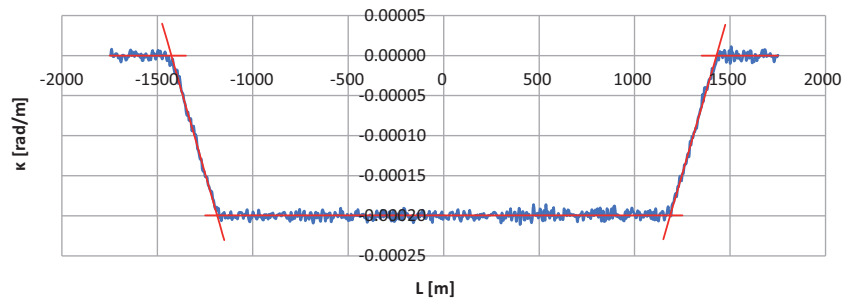
Rys. 8. Wykresy kąta kierunkowego na długości krzywej przejściowej z lewej strony układu geometrycznego dla prędkości 260 km/h [opracowanie własne]



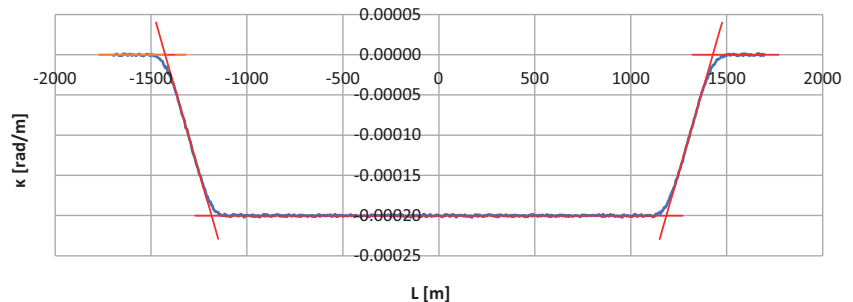
Rys. 9. Wykresy kąta kierunkowego na długości krzywej przejściowej z prawej strony układu geometrycznego dla prędkości 260 km/h [opracowanie własne]



Rys. 10. Wykres krzywizny na długości układu geometrycznego dla prędkości 260 km/h wyznaczony przy długości cięciwy  $l_c = 50$  m [opracowanie własne]



Rys. 11. Wykres krzywizny na długości układu geometrycznego dla prędkości 260 km/h wyznaczony przy długości cięciwy  $l_c = 100$  m [opracowanie własne]



(czyli ma mniejsze zaburzenia) przy zastosowaniu długości cięciwy  $l_c = 100$  m. To spostrzeżenie potwierdzi się również podczas wyznaczania krzywizny osi toru.

Na rysunkach 10 i 11 pokazano wykresy krzywizny osi toru określone za pomocą wzoru (14), odpowiednio dla  $l_c = 50$  m i  $l_c = 100$  m. Ujemne wartości krzywizny na tych wykresach wynikają z kształtu osi toru na rysunku 6 (wypukłość skierowana do góry). Kolorem czerwonym zaznaczono rejony występowania poszczególnych elementów geometrycznych.

Na odcinkach prostych krzywizna jest równa zero, na łuku kołowym wyznacza ją średnia arytmetyczna z wartości krzywizny w punktach pomiarowych, a na krzywych przejściowych prosta najmniejszych kwadratów. Punkty przecięcia tej ostatniej z prostymi poziomymi wyznaczają początki i końce krzywych przejściowych. W tabelicy 1 podano wartości statystyk dotyczących łuku kołowego.

Z wykresów na rysunkach 10 i 11 oraz wartości liczbowych w tabelicy 1 wynika wysoka skuteczność

metody ruchomej cięciwy przy wyznaczaniu krzywizny osi toru kolejowego. W wyniku zdeformowania układu modelowego, na wykresach krzywizny występują pewne zaburzenia, jednak są one stosunkowo niewielkie, stąd praktyczna przydatność wykresów  $\kappa(L)$  podczas identyfikacji układu geometrycznego nie może podlegać dyskusji. Jednocześnie ujawniła się wyraźna przewaga cięciwy o długości  $l_c = 100$  m, dostrzegalna zarówno w sposób wzrokowy na rysunkach, jak również na podstawie danych liczbowych w tabelicy 1. W tej sytuacji tę właśnie długość cięciwy należałoby rekomendować do stosowania na kolejach dużych prędkości.

#### 4.2. Układ geometryczny dla prędkości 350 km/h

Drugi rozpatrywany układ geometryczny, przystosowany do prędkości 350 km/h, składa się z łuku kołowego o promieniu 10 000 m, dwóch krzywych

Tabela 1

Zestawienie wartości statystyk krzywizny łuku kołowego dla różnych długości cięciwy

| Długość cięciwy $l_c$ [m] | Wartość krzywizny $\bar{\kappa}$ [rad/m] | Promień łuku kołowego $\bar{R}$ [m] | Odchylenie standardowe $\sigma_{\kappa}$ [rad/m] | Wskaźnik krzywizny $\sigma_{\kappa}/\bar{\kappa}$ [%] |
|---------------------------|--|-------------------------------------|--|---|
| 50                        | -0,0001993850                            | 5015,421                            | 4,35346E-06                                      | 2,183   |
| 100                       | -0,0002000043                            | 4999,893                            | 8,94415E-07                                      | 0,447   |

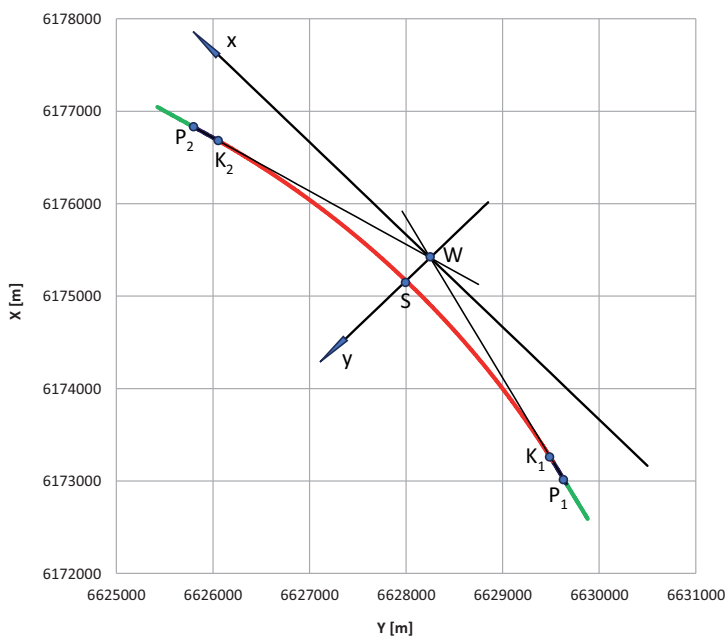
[opracowanie własne].

prześciowych w postaci klotoidy o długości 280 m oraz dwóch odcinków prostych długości około 440 m. Całkowita długość układu wynosi 6400 m, przy kącie zwrotu trasy  $\alpha = 0,523599$  rad. Jego usytuowanie w układzie PL-2000 pokazano na rysunku 12. Tak jak na rysunkach 5 i 6, łuk kołowy został oznaczony kolorem czerwonym, krzywe przejściowe kolorem niebieskim, a odcinki proste kolorem zielonym.

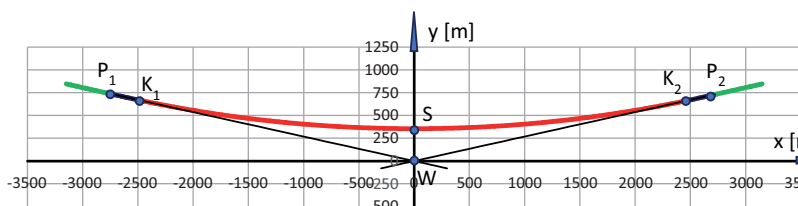
Na rysunku 12 zostały zaznaczone osie lokalnego układu współrzędnych  $x, y$ , którego początek zlokalizowano w punkcie przecięcia kierunków głównych trasy. W celu uzyskania symetrycznego układu

geometrycznego w lokalnym układzie współrzędnych, należy przesunąć początek układu PL-2000 do punktu  $W$  i dokonać obrotu tego układu w lewo o kąt  $\beta = 2,356194$  rad. Otrzymuje się wówczas sytuację pokazaną na rysunku 13. Występujące oznaczenia na rysunkach 12 i 13 są takie same jak na rysunkach 5 i 6.

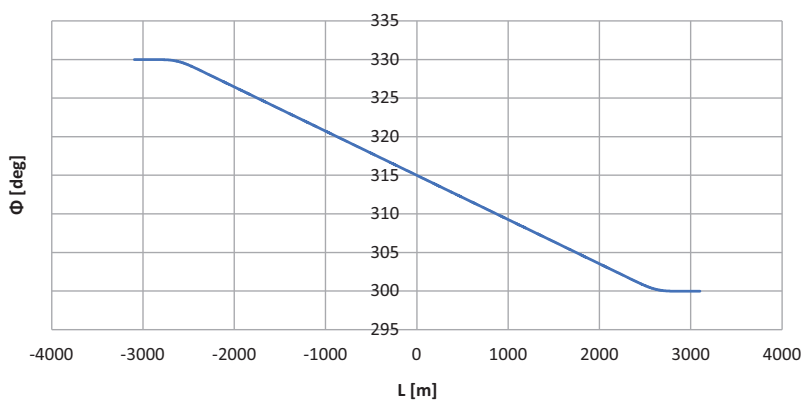
Po wirtualnym zdeformowaniu modelowego układu geometrycznego wyznaczono wartości kąta kierunkowego, przyjmując długość cięciwy  $l_c = 100$  m. Ponieważ w rozpatrywanym przypadku kąt nachylenia stycznej  $\Theta_i \in \langle 90^\circ; 180^\circ \rangle$ , do wyznaczenia kąta kierunkowego wykorzystano wzór (4). Uzyskano wykres  $\Phi(L)$  pokazany na rysunku 14.



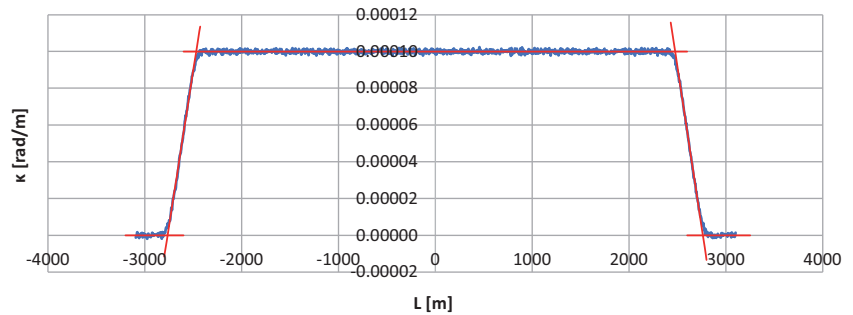
Rys. 12. Układ geometryczny dla prędkości 350 km/h w układzie PL-2000 [opracowanie własne]



Rys. 13. Układ geometryczny dla prędkości 350 km/h w lokalnym układzie współrzędnych [opracowanie własne]



Rys. 14. Wykres kąta kierunkowego na długości układu geometrycznego dla prędkości 350 km/h [opracowanie własne]



Rys. 15. Wykres krzywizny na długości układu geometrycznego dla prędkości 350 km/h wyznaczony przy długości cięciwy  $l_c = 100$  m [opracowanie własne]

Na rysunku 15 pokazano wykres krzywizny osi toru określony za pomocą wzoru (14), z wykorzystaniem cięciwy o długości  $l_c = 100$  m. Wartości krzywizny na tym rysunku są dodatnie, gdyż układ geometryczny na rysunku 13 ma wypukłość skierowaną do dołu. Tak jak poprzednio (tj. na rysunkach 10 i 11) kolorem czerwonym zaznaczono rejon występowania poszczególnych elementów geometrycznych.

Wartości statystyk dotyczących łuku kołowego są następujące:

- wartość średnia krzywizny łuku kołowego  $\bar{\kappa} = 0,0000999982$  rad/m,
- wartość średnia promienia łuku kołowego  $\bar{R} = 10000,177$  m,
- odchylenie standardowe krzywizny łuku kołowego  $\sigma_{\kappa} = 9,03667E-07$  rad/m,
- wskaźnik krzywizny  $\sigma_{\kappa} / \bar{\kappa} = 0,904\%$ .

Analiza układu geometrycznego dla prędkości 350 km/h potwierdziła w sposób bezdyskusyjny przydatność metody ruchomej cięciwy do określania kąta kierunkowego trasy i wyznaczania krzywizny osi toru na kolejach dużych prędkości. Cięciwa o długości  $l_c = 100$  m wydaje się być przy tym najlepszym rozwiązaniem.

## 5. Wnioski

Znajomość aktualnego ukształtowania geometrycznego trasy kolejowej, uzyskiwana na drodze pomiarowej, pozwala eliminować występujące nieprawidłowości i wprowadzać ewentualne korekty. Na podstawie przeprowadzonych pomiarów staje się możliwa identyfikacja danej trasy. Polega ona na określeniu jej parametrów geometrycznych przez wykorzystanie wyznaczonych współrzędnych kartezjańskich punktów osi toru w odpowiednim państwowym systemie odniesień przestrzennych.

Obecne podejście do problemu identyfikacji pomierzonej trasy kolejowej polega na wygenerowaniu w danym obszarze zoptymalizowanego układu geometrycznego, przez zminimalizowanie występujących odchyłeń tegoż układu od punktów pomiarowych (przy

spełnieniu odpowiednich wymagań utrzymaniowych i eksploatacyjnych). Jak się okazuje, do tego problemu można podejść w zupełnie inny sposób, gdyż podstawę identyfikacji może stanowić wyznaczona krzywizna osi toru.

Ponieważ w każdym przypadku identyfikacja układu geometrycznego toru odbywa się na podstawie współrzędnych kartezjańskich punktów osi toru (uzyskiwanych w trakcie procesu inwentaryzacyjnego), postanowiono wykorzystać te współrzędne w nowych metodach obliczeniowych, w których główną rolę odgrywa wyznaczone nachylenie stycznej do osi toru. Określeniu tej wartości służy identyfikacja wirtualnej cięciwy wystawionej w płaszczyźnie poziomej, która łączy ze sobą dwa punkty na osi toru (cięciwa ta zostaje wyprowadzona z danego punktu pomiarowego do przodu i do tyłu).

W artykule szczegółowo opisano założenia metody określania kąta kierunkowego trasy oraz metody wyznaczania krzywizny osi toru, wraz z odpowiednimi algorytmami obliczeniowymi. Następnie podjęto próbę sprawdzenia, w jakim stopniu te metody odpowiadają uwarunkowaniom występującym na kolejach dużych prędkości. Zostało to zaprezentowane na dwóch przykładach obliczeniowych, obejmujących układy geometryczne dla prędkości 260 km/h i 350 km/h. Aby zachować możliwości odnoszenia się w większym stopniu do rzeczywistości, postanowiono uzyskać hipotetyczne dane pomiarowe przez wirtualne zdeformowanie tych układów (współrzędne osi toru zostały skorygowane losowo w odstępach co 5 m, przyjmując wartość błędów maksymalnego  $\pm 10$  mm). Wyznaczanie kąta kierunkowego trasy oraz krzywizny osi toru przeprowadzono dla długości cięciwy  $l_c = 50$  m i  $l_c = 100$  m.

Rozpatrywane metody są metodami pokrewnymi, gdyż obie wykorzystują ruchomą cięciwę. Porównując je ze sobą można wysnuć wniosek, że metoda określania kąta kierunkowego jest znacznie dokładniejsza od metody wyznaczania krzywizny. Bierze się to zapewne z przyjmowanego przy wyznaczaniu krzywizny dodatkowego założenia upraszczającego, dotyczącego odległości pomiędzy punktami styczności obu cięciw do układu geometrycznego. Jednak jak wykazały przeprowadzone liczne analizy, stwierdzone

niedokładności nie mają znaczenia z punktu widzenia procesu inwentaryzacyjnego.

Pod względem jakościowym, wyniki przeprowadzonej analizy nie różniły się niczym od wcześniejszych analiz, odnoszących się do kolei konwencjonalnych [11–13, 16]. Potwierdziły one w sposób bezdyskusyjny przydatność rozpatrywanych metod do określania kąta kierunkowego trasy i wyznaczania krzywizny osi toru na kolejach dużych prędkości. Jak wykazano, do stosowania na tych kolejach należałoby rekomendować cięgiwę o długości  $l_c = 100$  m.

## Literatura

1. A guide to using IMU (accelerometer and gyroscope devices) in embedded applications, Starlino Electronics, 2009, [http://www.starlino.com/imu\\_guide.html](http://www.starlino.com/imu_guide.html).
2. Camacho-Torregrosa F.J. et al.: *Use of heading direction for recreating the horizontal alignment of an existing road*, Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering, vol. 30, iss. 4, pp. 282–299, 2015, Wiley.
3. Cellmer S. et al.: *New approach to arc fitting for railway track realignment*, Journal of Surveying Engineering, vol. 142, iss. 2, pp. 1–24, 2016, American Society of Civil Engineers.
4. Code of federal regulations title 49 transportation, Federal Railroad Administration, US Government Printing Office, Washington, DC, USA, 2008.
5. Deutsche Bahn Netz AG: 883.2000 DB\_REF-Festpunktfeld, Berlin, Germany, 2016.
6. Dong H., Easa S.M., Li J.: *Approximate extraction of spiraled horizontal curves from satellite imagery*, Journal of Surveying Engineering, vol. 133, iss. 1, pp. 36–40, 2007, American Society of Civil Engineers.
7. Easa S. M., Wang F.: *Fitting composite horizontal curves using the total least-squares method*, Survey Review, vol. 43, iss. 319, pp. 67–79, 2011, Taylor & Francis Online.
8. European Committee for Standardization (CEN): Railway applications – Track – Track alignment design parameters – Track gauges 1435 mm and wider. Part 1: Plain line. EN 13803-1, Brussels, Belgium, 2010.
9. Gikas V., Stratakos J.: *A novel geodetic engineering method for accurate and automated road/railway centerline geometry extraction based on the bearing diagram and fractal behavior*, IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, vol. 13, iss. 1, pp. 115–126, 2012, Institute of Electrical and Electronics Engineers.
10. Guimarães-Steinicke C. et al.: *Chapter Four – Terrestrial laser scanning reveals temporal changes in biodiversity mechanisms driving grassland productivity*, Advances in Ecological Research, vol. 61, pp. 133–161, 2019, ScienceDirect.
11. Koc W.: *A method for determining the directional angle of a railway route based on field measurements*, Sensors, vol. 24, 1131, 2024, Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
12. Koc W.: *Estimation of the horizontal curvature of the railway track axis with the use of a moving chord based on geodetic measurements*, Journal of Surveying Engineering, vol. 148, iss. 4, 04022007, 2022, American Society of Civil Engineers.
13. Koc W.: *Identification of geometrical parameters of an operational railway route determined by the curvature of the track axis*, European Journal of Applied Sciences, vol. 10, iss. 5, pp. 129–148, 2022, Services for Science and Education – United Kingdom.
14. Koc W.: *Podstawowe warianty analitycznej metody projektowania układów geometrycznych toru*, Problemy Kolejnictwa, 2023, tom 67, z. 200, s. 39–53.
15. Koc W.: *The method of determining horizontal curvature in geometrical layouts of railway track with the use of moving chord*, Archives of Civil Engineering, vol. 66, iss. 4, pp. 579–591, 2020, Warsaw University of Technology.
16. Koc W.: *The procedure of identifying the geometrical layout of an exploited railway route based on the determined curvature of the track axis*, Sensors, vol. 23, iss. 1, 274, 2023, Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
17. Koc W., Specht C.: *Selected problems of determining the course of railway routes by use of GPS network solution*, Archives of Transport, vol. 23, iss. 3, pp. 303–320, 2011, Polish Academy of Sciences.
18. Lai X., Schonfeld P.: *Concurrent optimization of rail transit alignments and station locations*, Urban Rail Transit, vol. 2, iss. 1, pp. 1–15, 2016, Springer.
19. Lenda G.: *Determining the geometrical parameters of exploited rail track using approximating spline functions*, Archives of Civil Engineering, vol. 60, iss. 3, pp. 295–305, 2014, Polish Academy of Sciences.
20. Li W. et al.: *A method for automatically recreating the horizontal alignment geometry of existing railways*, Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering, vol. 34, iss. 1, pp. 71–94, 2019, Wiley.
21. Li W. et al.: *Recreating existing railway horizontal alignments automatically using overall swing iteration*, Journal of Transportation Engineering: Part A – Systems, vol. 148, iss. 8, 04022046, 2022, American Society of Civil Engineers.
22. Luo W., Li L., Wang K.: *Automatic horizontal curve identification and measurement using Mobile Mapping System*, Journal of Surveying Engineering, vol. 144, iss. 4, 04018007, 2018, American Society of Civil Engineers.

23. Moritz H.: *Geodetic Reference System 1980*, Journal of Geodesy, vol. 74, 2000, pp. 128–133, Springer.
24. Network Rail: NR/L3/TRK/0030 NR Reinstatement of Absolute Track Geometry (WCRL Routes), iss. 1, London, United Kingdom, 2008.
25. Othman S., Thomson R., Lannér G.: *Using naturalistic field operational test data to identify horizontal curves*, Journal of Transportation Engineering, vol. 138, iss. 9, pp. 1151–1160, 2012, American Society of Civil Engineers.
26. Quan, Y., Lau L.: *Development of a trajectory constrained rotating arm rig for testing GNSS kinematic positioning*, Measurement, vol. 140, pp. 479–485, 2019, ScienceDirect.
27. Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 15 października 2012 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych, Dz.U. 2012, poz. 1247.
28. Skąła-Szymańska M., Cellmer S., Rapiński J.: *Use of Nelder-Mead simplex method to arc fitting for railway track realignment*, In Proc. The 9th International Conference "Environmental Engineering", Vilnius, Lithuania, 22–23 May 2014.
29. Song Z. et al.: *Effect of point configurations on parameter estimation analysis of circles*, Journal of Surveying Engineering, vol. 147, iss. 3, 04021010, 2021, American Society of Civil Engineers.
30. Song Z. et al.: *Heuristic strategies of modified Levenberg-Marquardt algorithm for fitting transition curves*, Journal of Surveying Engineering, vol. 146, iss. 2, 04020001, 2020, American Society of Civil Engineers.
31. Specht C., Koc W.: *Mobile satellite measurements in designing and exploitation of rail roads*, Transportation Research Procedia, vol. 14, pp. 625–634, 2016, ScienceDirect.
32. Standardy Techniczne – Szczegółowe warunki techniczne dla modernizacji lub budowy linii kolejowych do prędkości  $V_{\max} \leq 200$  km/h (dla taboru konwencjonalnego) / 250 km/h (dla taboru z wychylnym pudłem) – Tom I – Droga szynowa – Załącznik ST-T1-A6: Układy geometryczne torów, PKP Polskie Linie Kolejowe, Warszawa, 2018.
33. Turiño C.E.: *Gauss Krüger projection for areas of wide longitudinal extent*, International Journal of Geographical Information Science, vol. 22, iss. 6, pp. 703–719, 2008, Taylor & Francis Online.
34. Wu S., et al.: *Improving ambiguity resolution success rate in the joint solution of GNSS-based attitude determination and relative positioning with multivariate constraints*, GPS Solutions, vol. 24, iss. 1, 31, 2020, Springer.
35. Zhang H. et al.: *Multi-objective railway alignment optimization considering costs and environmental impacts*, Applied Soft Computing, vol. 89, 106105, 2020, ScienceDirect.