

# Modyfikacja łuków odwrotnych na liniach kolejowych z wykorzystaniem krzywych łączących

Władysław KOC<sup>1</sup>

## Streszczenie

Artykuł podejmuje kwestię modyfikacji łuków odwrotnych, czyli układu geometrycznego złożonego z dwóch następujących po sobie łuków kołowych (najczęściej o różnych promieniach), skierowanych w przeciwnych kierunkach i połączonych ze sobą w sposób bezpośredni. Łuki te stwarzają określone problemy eksploatacyjne spowodowane gwałtownymi zmianami krzywizny, jakie na nich występują. Opisano kwestię odległości pomiędzy punktami przecięcia sąsiednich kierunków głównych trasy, która nie może być zbyt mała. Na modernizowanych liniach kolejowych bardzo często ten warunek nie jest spełniony i wówczas należy łuki odwrotne odpowiednio zmodyfikować. Rozpatrzono trzy układy geometryczne łuków odwrotnych. W Układzie I występowała znaczna odległość pomiędzy punktami głównymi trasy (tj. 1000 m). Jak wykazano, w takim przypadku można z powodzeniem stosować standardowe rozwiązanie, polegające na wykorzystaniu łuków kołowych z krzywymi przejściowymi. W Układzie II przyjęto ograniczoną odległość pomiędzy punktami głównymi trasy (tj. 400 m). W kontekście prędkości jazdy pociągów, standardowe rozwiązanie nie spełniło w danym przypadku swojego zadania. Zaproponowano więc wprowadzenie krzywej łączącej ze sobą dwa skrajne kierunki główne, która spełnia odpowiednie warunki brzegowe i przyjęte równanie różniczkowe. Krzywą tę można wydłużać, zwiększając maksymalną prędkość pociągów na trasie. Ograniczeniem mogą być pojawiające się przeszkody, wynikające np. z uwarunkowań terenowych. Układ III charakteryzuje się niewielką odległością pomiędzy punktami głównymi trasy (tj. 200 m). Standardowe rozwiązanie okazuje się tu nie do przyjęcia również ze względów konstrukcyjnych, tj. wpisywania się kół taboru kolejowego w tor przy bardzo małych promieniach łuków kołowych. Zastosowanie wydłużonej krzywej łączącej może się w tej sytuacji okazać jedynym korzystnym rozwiązaniem. Zaproponowana metoda modyfikacji łuków odwrotnych stwarza dużą szansę na pokonanie występujących problemów w procesie projektowania.

**Słowa kluczowe:** linie kolejowe, łuki odwrotne, metody modyfikacji, koncepcja wydłużonej krzywej łączącej, analiza prędkości jazdy pociągów

## 1. Wstęp

Obecnie, największe zainteresowanie w dziedzinie kolejnictwa skupiają na sobie koleje dużych prędkości [3, 4, 6, 21, 32]. Liczne badania dotyczą również taboru kolejowego i kwestii jego utrzymania [23, 31, 35], a w zakresie nawierzchni kolejowej rozwijana jest na szeroką skalę problematyka oddziaływań w układzie pojazd szynowy – tor [5, 7, 22, 29, 30]. Natomiast ugruntowało się przekonanie, że prowadzenie prac badawczych dotyczących projektowania układów geometrycznych torów ma teraz jakby mniejsze znaczenie. Niewątpliwie jest to związane z powszechnym wykorzystywaniem komercyjnego oprogramowania komputerowego [18, 20] przy opracowaniu dokumentacji projektowej. Choć takie prace są pro-

wadzone [1, 2, 8, 33], to ich zakres jest często ograniczony do zagadnień szczegółowych, takich jak krzywe przejściowe [11, 12, 14, 34] czy rozjazdy kolejowe [9, 13, 19, 26].

Powstające nowe linie kolejowe są z reguły przystosowane do zwiększonej prędkości jazdy pociągów; zresztą znaczną ich część stanowią koleje dużych prędkości. Jednak pod względem długości nadal zdecydowanie dominują linie tradycyjne, najczęściej zbudowane jeszcze w XIX wieku i eksploatowane po dzień dzisiejszy. Nie ulega wątpliwości, że należałoby dostosować je do współczesnych wymagań. Dotyczy to zwłaszcza linii kolejowych przebiegających w trudnych warunkach terenowych (np. w terenie górskim), na których występują małe promienie łuków poziomych, a dodatkowo kontrowersyjne układy geome-

<sup>1</sup> Prof. dr hab. inż.; Politechnika Gdańska, Katedra Inżynierii Transportowej; e-mail: kocwl@pg.edu.pl.

tryczne, takie jak łuki kosztowe i łuki odwrotne. Poprawa jakości tych linii, prowadząca do zwiększenia prędkości jazdy pociągów, wymaga przeprowadzenia odpowiednich działań modernizacyjnych. Tymczasem – jak się wydaje – linie te znikają z pola zainteresowania działalności badawczej.

W tym miejscu należy podnieść kwestię specyfiki procesu modyfikacji omawianych linii. Dotyczy ona znaczenia występujących uwarunkowań terenowych, na które należy patrzeć ze znacznie szerszej perspektywy. Linie z łukami kosztowymi i odwrotnymi występują od zarania kolejnictwa i wrosły w istniejącą od wielu lat zabudowę. I właśnie ta zabudowa, wraz z ukształtowaniem terenu, ciekami wodnymi i obiektami inżynierskimi, mogą skutecznie ograniczać możliwości modyfikacji. Nowe rozwiązanie geometryczne powinno uwzględniać istniejącą sytuację w możliwie jak największym stopniu. Jednak trzeba się również liczyć z tym, że czasami względy natury technicznej i ekonomicznej uniemożliwią skuteczne rozwiązanie problemu.

Niniejszy artykuł podejmuje kwestię modyfikacji łuków odwrotnych, czyli układu geometrycznego złożonego z dwóch następujących po sobie łuków kołowych (najczęściej o różnych promieniach) skierowanych w przeciwnych kierunkach i połączonych ze sobą w sposób bezpośredni. Łuki te stwarzają określone problemy eksploatacyjne spowodowane gwałtownymi zmianami krzywizny jakie na nich występują. W mniejszym stopniu objął je również postęp w zakresie techniki obliczeniowej, który nastąpił w II połowie XX wieku. Z naukowego punktu widzenia zainteresowanie omawianym problemem jest stosunkowo niewielkie, eksponowane są raczej praktyczne aspekty zagadnienia [28].

Kwestię nowego spojrzenia na projektowanie łuków odwrotnych podjęto w pracy [16]. Zostały tam przedstawione rozwiązania standardowe, polegające na utworzeniu układu geometrycznego złożonego z dwóch odwrotnie skierowanych łuków kołowych i czterech krzywych przejściowych, łączących te łuki z odpowiednimi kierunkami głównymi trasy. W pracy [16] zwrócono jednak uwagę na występujące ograniczenia w stosowaniu proponowanej metody, bowiem łuków odwrotnych nie można kształtować w dowolny sposób, lecz trzeba uwzględniać różne występujące uwarunkowania. Przede wszystkim musi być zachowana odpowiednia odległość pomiędzy punktami przecięcia sąsiednich kierunków głównych trasy (nie może być ona zbyt mała). Na modernizowanych liniach kolejowych warunek ten bardzo często nie jest spełniony i wówczas należy łuki odwrotne odpowiednio zmodyfikować.

Podobnie jak w innych wariantach analitycznej metody projektowania, stosowana procedura obliczeniowa wymaga operowania w lokalnym ukła-

dzie współrzędnych. Początek tego układu lokalizuje się w punkcie przecięcia dwóch sąsiednich kierunków głównych trasy kolejowej, którego współrzędne kartezjańskie są określone w układzie globalnym (w Polsce jest to państwowy system odniesień przestrzennych [25], w którym można korzystać z układu współrzędnych płaskich prostokątnych oznaczonego symbolem PL-2000). Taką właśnie wersję omawianej metody przedstawiono w pracy [17]; ma ona charakter uniwersalny i obejmuje rejon połączenia ze sobą kierunków głównych zarówno o charakterze symetrycznym, jak i niesymetrycznym. Analogiczne podejście znalazło również zastosowanie przy projektowaniu łuków odwrotnych w pracy [16].

Dla łuków odwrotnych występuje jednak zasadnicza różnica w stosunku do większości przypadków analitycznej metody projektowania. W układach geometrycznych najczęściej wyodrębnia się dwa sąsiednie kierunki główne trasy i obejmuje się je dalszą procedurą (w tym utworzeniem lokalnego układu współrzędnych). Przy łukach odwrotnych pojawia się trzeci kierunek główny i w znacznym stopniu komplikuje sprawę, ograniczając uniwersalność opracowywanej metody. Jednak jeśli chodzi o lokalny układ współrzędnych, zachowano przyjętą zasadę; wyznacza się go wykorzystując dwa wybrane sąsiednie kierunki główne, które ustawia się symetrycznie względem pionowej osi współrzędnych.

W pewnym stopniu nawiązano przy tym do przedstawionej w pracy [15] metody modelowania łuków kosztowych na liniach kolejowych. Trzeci kierunek główny, jaki pojawia się na łuku odwrotnym, nie pozwala jednak na przedstawienie – tak jak w przypadku łuków kosztowych – uniwersalnej metody projektowania w zapisie symbolicznym. Dlatego też w pracy [16], przy prezentacji poszczególnych etapów procedury projektowania łuków odwrotnych, odpowiednie wzory teoretyczne należało bezpośrednio wykorzystywać w konkretnym przykładzie obliczeniowym. Jednocześnie wskazywano na możliwość rozszerzenia zakresu zastosowań opracowanej metody przez analogię.

## 2. Rozpatrywane układy kierunków głównych trasy

Przy rozpatrywaniu płaszczyzny poziomej trasy kolejowej, w układzie geometrycznym łuków odwrotnych występują trzy kolejne kierunki główne (opisane jako *Prosta 1*, *Prosta 2* i *Prosta 3*), przy czym ostatni kierunek (tj. *Prosta 3*) odchyła się od kierunku poprzedzającego (*Prostej 2*) w stronę przeciwną niż miało to miejsce wcześniej. Kierunki te przecinają się w punktach  $W_1$  (*Prosta 1* z *Prostą 2*) i  $W_2$  (*Prosta 2* z *Prostą 3*).

Układ kierunków głównych należy przenieść z układu PL-2000 do lokalnego układu współrzędnych za pomocą odpowiednich wzorów [16]. Może wówczas powstać sytuacja jak pokazano na rysunku 1. Przedstawia on rozpatrywane układy kierunków głównych trasy, które różnią się położeniem *Prostej 3*; wynika to ze zróżnicowanej odległości pomiędzy punktami głównymi  $W_1$  i  $W_2$ . Chodzi więc tutaj o sprawdzenie sugestii zawartej w pracy [16], że odległość ta nie może być zbyt mała. W Układzie I wartość  $W_1W_{2(I)} = 1000$  m, w Układzie II –  $W_1W_{2(II)} = 400$  m, a w Układzie III –  $W_1W_{2(III)} = 200$  m.

Nachylenia poszczególnych kierunków głównych wynoszą: dla *Prostej 1*  $\varphi_1 = 0,523599$  rad, dla *Prostej 2*  $\varphi_2 = -0,523599$  rad, a dla *Prostej 3* (w każdym z trzech przypadków)  $\varphi_3 = 0,349066$  rad. Wynikają stąd kąty zwrotu trasy:  $\alpha_1 = |\varphi_2 - \varphi_1| = 1,047198$  rad,  $\alpha_2 = |\varphi_3 - \varphi_2| = 0,872664626$  rad. Współrzędne punktu  $W_1$  wynoszą:  $x_{W1} = 0$ ,  $y_{W1} = 0$ , występuje natomiast zróżnicowanie współrzędnych punktu  $W_2$ :

- dla Układu I:  $x_{W2(I)} = 866,025$  m,  $y_{W2(I)} = -500$  m,
- dla Układu II:  $x_{W2(II)} = 346,410$  m,  $y_{W2(II)} = -200$  m,
- dla Układu III:  $x_{W2(III)} = 173,205$  m,  $y_{W2(III)} = -100$  m.

Przedstawione układy kierunków głównych stanowią podstawę dalszej szczegółowej analizy.

### 3. Przypadek znacznej odległości pomiędzy punktami głównymi łuku odwrotnego (Układ I)

#### 3.1. Zastosowanie łuków kołowych (Wariant IA)

Jak wykazano w pracy [16], w układzie geometrycznym łuków odwrotnych występuje zależność pomiędzy wartościami promieni obydwu łuków. Wartości te muszą odpowiadać występującemu układowi kierunków głównych. Kluczową kwestię stanowi tutaj przyjęcie właściwego punktu połączenia łuków kołowych. Punkt ten (oznaczenie  $B$  na rysunku 2) znajduje się na *Prostej 2*, przy czym obowiązują warunki  $x_B \in (x_{W1}, x_{W2})$  oraz  $W_1B + BW_2 = W_1W_2$ . Dla danego układu, położenie punktu  $B$  określa wartości obydwu promieni, gdyż wartości  $W_1B$  i  $BW_2$  są stycznymi odpowiednich łuków. Ogólnie rzecz biorąc, zwiększenie promienia jednego łuku powoduje konieczność zmniejszenia promienia łuku odwrotnego.

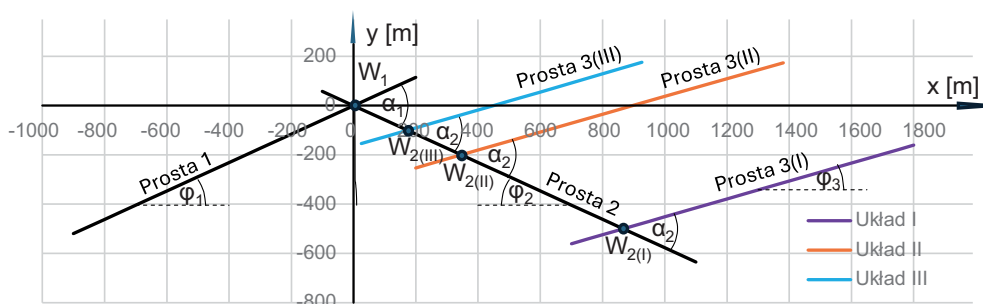
W tej sytuacji uznano, że z perspektywy możliwej do uzyskania jak największej prędkości jazdy pociągów będzie najkorzystniej, kiedy w układzie pierwotnym (tj. bez stosowania krzywych przejściowych) obydwa łuki kołowe będą mieć taki sam promień. Jego wartość można wyznaczyć iteracyjnie, przyjmując różne położenia punktu  $B$  na *Prostej 2* (a ściślej – różne odległości tego punktu od punktu głównego  $W_1$ ). Wykorzystano wzory na wartości promieni podane w pracy [16].

$$R_1 = \frac{\sqrt{(x_B - x_{W1})^2 + (y_B - y_{W1})^2}}{\tan \frac{|\varphi_2 - \varphi_1|}{2}} = \frac{\overline{W_1B}}{\tan \frac{\alpha_1}{2}} \quad (1)$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{(x_{W2} - x_B)^2 + (y_{W2} - y_B)^2}}{\tan \frac{|\varphi_3 - \varphi_2|}{2}} = \frac{\overline{BW_2}}{\tan \frac{\alpha_2}{2}} \quad (2)$$

W tabelicy 1 pokazano finalny fragment przeprowadzonych obliczeń.

Jak widać, w rozpatrywanym przypadku najmniejsza różnica  $\Delta R = R_2 - R_1$  występuje dla  $W_1B = 553,1988$  m, zatem wyznaczone iteracyjnie promienie łuków odwrotnych wynoszą  $R = R_1 = R_2 = 958,168$  m. Ponieważ  $s_2 = \tan \varphi_2 = -0,57735$ , współrzędne punktu  $B$  są równe:  $x_B = 479,084$  m,  $y_B = -276,599$  m. Wynikają stąd bezpośrednio współrzędne punktu początkowego  $A$ :  $x_A = -479,084$  m,  $y_A = -276,599$  m. Natomiast odległość  $BW_2 = W_1W_2 - W_1B$  wynosi 446,801 m, skąd wynikają współrzędne punktu  $C$ :  $x_C = 1285,881$  m,  $y_C = -347,185$  m.



Rys. 1. Rozpatrywane układy kierunków głównych trasy o zróżnicowanym położeniu trzeciego kierunku głównego [opracowanie własne]

Tablica 1

Końcowy fragment obliczeń przy wyznaczaniu pierwotnego promienia łuków odwrotnych

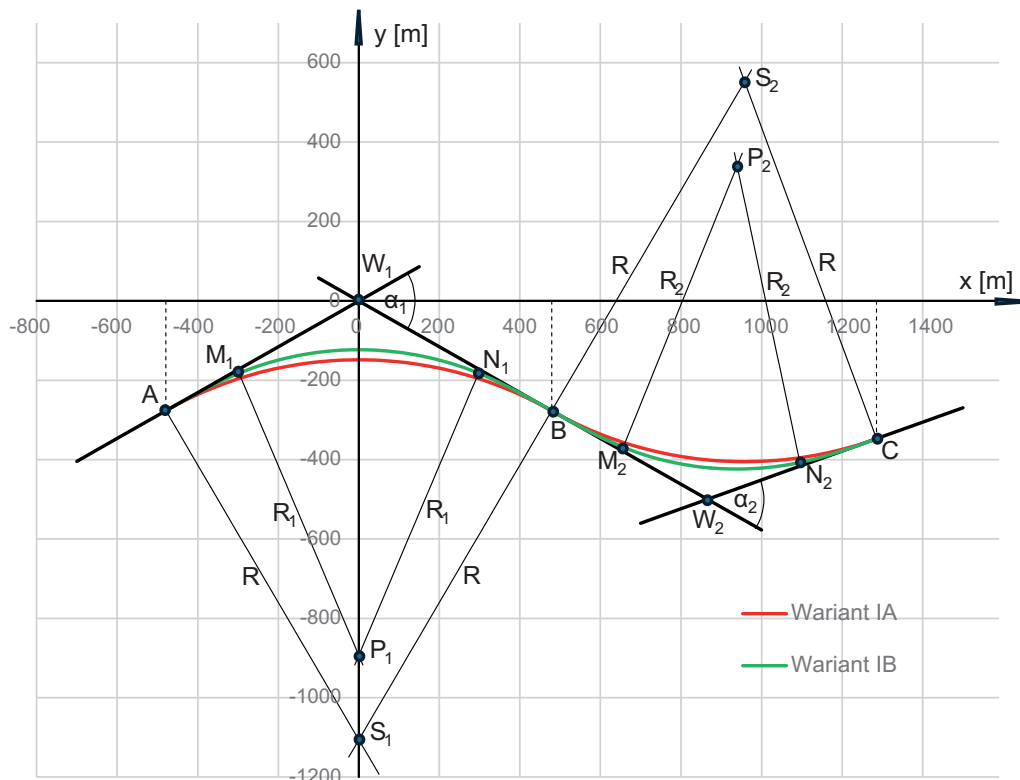
| $\overline{W_1B}$ [m] | $\alpha_1$ [rad] | $R_1$ [m] | $\overline{BW_2}$ [m] | $\alpha_2$ [rad] | $R_2$ [m] | $\Delta R$ [m] |
|-----------------------|------------------|-----------|-----------------------|------------------|-----------|----------------|
| 553,1984              | 1,047198         | 958,1677  | 446,8016              | 0,872664626      | 958,1691  | 0,001388       |
| 553,1985              | 1,047198         | 958,1679  | 446,8015              | 0,872664626      | 958,1689  | 0,001000       |
| 553,1986              | 1,047198         | 958,1681  | 446,8014              | 0,872664626      | 958,1687  | 0,000613       |
| 553,1987              | 1,047198         | 958,1683  | 446,8013              | 0,872664626      | 958,1685  | 0,000225       |
| 553,1988              | 1,047198         | 958,1684  | 446,8012              | 0,872664626      | 958,1683  | -0,000163      |
| 553,1989              | 1,047198         | 958,1686  | 446,8011              | 0,872664626      | 958,1681  | -0,000550      |
| 553,1990              | 1,047198         | 958,1688  | 446,8010              | 0,872664626      | 958,1678  | -0,000938      |

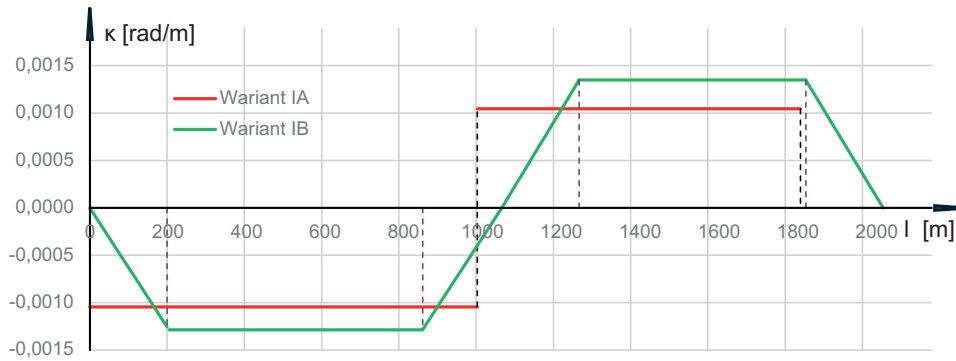
[Opracowanie własne].

Wstawienie łuków odwrotnych o promieniu  $R$  do układu geometrycznego daje efekt, który pokazano na rysunku 2 (oznaczony kolorem czerwonym). Współrzędne środków tych łuków są następujące:  $x_{S1} = 0$ ,  $y_{S1} = -1106,398$  m oraz  $x_{S2} = 958,168$  m,  $y_{S2} = 553,199$  m.

Omawiany układ łuków odwrotnych (określony mianem układu pierwotnego) ma wykres krzywizny na długości pokazany na rysunku 3 (również oznaczony kolorem czerwonym).

Jak widać, w układzie pierwotnym występują skokowe zmiany krzywizny. Oczywiście w rzeczywistej eksploatacji ich nie ma, gdyż są one łagodzone na długości bazy sztywnej wagonu. W przypadku przechyłki, która – w ujęciu modelowym – jest bezpośrednio powiązana z występującą krzywizną, względy konstrukcyjne wykluczają możliwość skokowych zmian. W rozpatrywanym przypadku nie można zatem wykonać przechyłki na łukach kołowych. Dlatego należy się liczyć z prowadzeniem ruchu pociągów ze stosunkowo niedużymi prędkościami.

Rys. 2. Wyznaczone standardowe układy geometryczne łuków odwrotnych dla Układu I ( $\overline{W_1W_2} = 1000$  m) [opracowanie własne]



Rys. 3. Wykresy krzywizny na długości układów geometrycznych z rysunku 2 [opracowanie własne]

Maksymalna prędkość jazdy pociągów na określonym układzie geometrycznym wynika z następujących wzorów ogólnych:

$$V_{\max} = \min(V^{(a)}, V^{(f)}, V^{(\psi)}) \quad (3)$$

$$V^{(a)} = 3,6 \sqrt{\frac{1}{\Delta\kappa} \cdot \left( a_{\text{dop}} + g \frac{\Delta h}{s} \right)} \quad (4)$$

$$V^{(f)} = \frac{3,6 \cdot \Delta l \cdot f_{\text{dop}}}{\Delta h} \quad (5)$$

$$V^{(\psi)} = \frac{3,6 \cdot \Delta l \cdot \psi_{\text{dop}}}{\Delta a} \quad (6)$$

gdzie:

- $\Delta\kappa$  – wartość różnicy krzywizny poziomej w rad/m,
- $\Delta h$  – wartość różnicy przechyłki w milimetrach,
- $\Delta a$  – wartość różnicy niezerównoważonego przyspieszenia w  $\text{m/s}^2$ ,

$$\Delta a = \left[ \frac{\min(V^{(a)}, V^{(f)})}{3,6} \right]^2 \cdot \Delta\kappa - g \frac{\Delta h}{s} \quad (7)$$

- $\Delta l$  – długość odcinka toru, na którym wyrażenia  $\Delta\kappa/\Delta l$ ,  $\Delta h/\Delta l$  oraz  $\Delta a/\Delta l$  przyjmują największą wartość (w metrach),
- $a_{\text{dop}}$  – dopuszczalna wartość niezerównoważonego przyspieszenia na łuku kołowym; przyjęto  $a_{\text{dop}} = 0,85 \text{ m/s}^2$  [27],
- $f_{\text{dop}}$  – dopuszczalna prędkość podnoszenia koła taboru na rampie przechyłkowej; przyjęto  $f_{\text{dop}} = 28 \text{ mm/s}$  [24],
- $\psi_{\text{dop}}$  – dopuszczalna wartość przyrostu przyspieszenia na krzywej przejściowej; przyjęto  $\psi_{\text{dop}} = 0,5 \text{ m/s}^3$  [24],
- $g$  – przyspieszenia ziemskie ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ),
- $s$  – rozstaw osiowy toków szynowych ( $s = 1500 \text{ mm}$ ).

Dla łuków kołowych  $\Delta\kappa = 1/R$  oraz  $\Delta h = h_0$  (gdzie  $h_0$  to wartość przechyłki na łuku w milimetrach); w rozpatrywanym przypadku założono  $\Delta l = l_b = 20 \text{ m}$  (tj. równą długości bazy sztywnej wagonu). Jak wynika z przedstawionych wzorów, dla przyjętych dopuszczalnych parametrów kinematycznych, prędkość  $V^{(a)}$  zależy od promienia  $R$  i przechyłki  $h_0$ , prędkość  $V^{(f)}$  od  $h_0$  i  $\Delta l$ , a prędkość  $V^{(\psi)}$  od  $\Delta a$  i  $\Delta l$ . Należy też zauważyć, że przyjęcie większej przechyłki  $h_0$  podnosi co prawda prędkość  $V^{(a)}$ , jednak jednocześnie ogranicza prędkość  $V^{(f)}$ , dlatego jest to istotne przy wyznaczaniu  $V^{(\psi)}$ .

W danej sytuacji nie występuje przechyłka na łukach kołowych (czyli  $\Delta h = h_0 = 0$ ). Na podstawie wzoru (4) uzyskano  $V^{(a)} = 102,738 \text{ km/h}$ , a na podstawie wzoru (6)  $V^{(\psi)} = 42,353 \text{ km/h}$  (prędkość  $V^{(f)}$  nie ma tutaj racji bytu). Możliwa do uzyskania prędkość wynosi zatem  $V_{\max} = 42 \text{ km/h}$  i jest stosunkowo niewielka; niezbędne staje się zatem wprowadzenie krzywych przejściowych.

### 3.2. Zastosowanie łuków kołowych z krzywymi przejściowymi (Wariant IB)

Stosowna procedura dotycząca zastosowania łuków kołowych z krzywymi przejściowymi została w sposób szczegółowy opisana w pracy [16]. Zaprojektowany układ geometryczny w Wariantcie IB pokazano na rysunku 2 (oznaczony kolorem zielonym). Wprowadzając krzywe przejściowe, kierowano się uzyskaniem jak największej prędkości jazdy pociągów. Przyjęto zatem na obu łukach przechyłkę  $h_{\max} = 150 \text{ mm}$ . Zastosowano krzywe przejściowe w postaci klotoidy, odpowiednio dostosowując ich długość do wyznaczonych w sposób iteracyjny promieni łuków odwrotnych  $R_1$  i  $R_2$  (które uległy zmniejszeniu w porównaniu do promienia  $R$  oraz wzajemnemu zróżnicowaniu związanego z innymi kątami zwrotu trasy). Występujące na rysunku 2 punkty charakterystyczne są następujące:

$A$  – punkt początkowy układu: początek pierwszego łuku pierwotnego o promieniu  $R$  oraz pierwszej

krzywej przejściowej (o długości  $l_{11}$ ) łuku kołowego o promieniu  $R_1$ ,

$M_1$  – koniec pierwszej krzywej przejściowej łuku o promieniu  $R_1$ ,

$N_1$  – koniec drugiej krzywej przejściowej (o długości  $l_{12}$ ) łuku o promieniu  $R_1$ ,

$B$  – punkt połączenia ze sobą obydwu łuków odwrotnych: koniec pierwszego łuku pierwotnego i początek drugiej krzywej przejściowej łuku o promieniu  $R_1$  oraz początek drugiego (odwrotnego) łuku pierwotnego i początek pierwszej krzywej przejściowej (o długości  $l_{21}$ ) łuku o promieniu  $R_2$ ,

$M_2$  – koniec pierwszej krzywej przejściowej łuku o promieniu  $R_2$ ,

$N_2$  – koniec drugiej krzywej przejściowej (o długości  $l_{22}$ ) łuku o promieniu  $R_2$ ,

$C$  – punkt końcowy układu: koniec drugiego łuku pierwotnego oraz początek drugiej krzywej przejściowej łuku o promieniu  $R_2$ .

Promienie  $R_1$  i  $R_2$  obydwu łuków odwrotnych są wyznaczane w sposób iteracyjny, uwzględniając kąty zwrotu trasy, dla różnych długości krzywych przejściowych. Założono tworzenie układów symetrycznych, w których  $l_{11} = l_{12} = l_1$  oraz  $l_{21} = l_{22} = l_2$ . W tablicy 2 pokazano końcowy fragment obliczeń wartości promienia  $R_1$  dla przyjętego  $l_1 = 205$  m. Wartości  $\Delta x_{KP}$

i  $\Delta x_{LK}$  oznaczają długości rzutów na oś  $x$  – odpowiednio – krzywej przejściowej i połowy łuku kołowego; wyznacza się je ze wzorów:

$$\Delta x_{KP} = |x_{M1} - x_A|, \Delta x_{LK} = \frac{|s_{M1}|}{\sqrt{1 + s_{M1}^2}} R_1.$$

Kryterium wyboru właściwego promienia stanowi w danym przypadku warunek:

$$\Delta x = \Delta x_{KP} + \Delta x_{LK} + x_A \approx 0.$$

Z tablicy 2 wynika, że najmniejsza różnica  $\Delta x$  występuje dla promienia  $R_1 = 778,488$  m. Przyjęcie ostatecznych wartości  $l_1$  i  $R_1$  wymaga przeprowadzenia analizy prędkości; zostało to pokazane w tablicy 3.

Na podstawie danych zawartych w tablicy 3 można wysnuć wniosek, że kryterium prędkości  $V^{(\psi)}$  jest w rozpatrywanym przypadku całkowicie nieprzydatne; pozostają zatem kryteria  $V^{(f)}$  i  $V^{(a)}$ . Z nich zaś wynika, że dla długości  $l_1 = 200$  m prędkość  $V_{\max} = \min(V^{(f)}, V^{(a)}) = 134$  km/h, natomiast dla  $l_1 = 205$  m i  $l_1 = 210$  m jest to 135 km/h. Aby niepotrzebnie nie wydłużać całego układu geometrycznego, należy przyjąć długość krzywej przejściowej  $l_1 = 205$  m i promień łuku kołowego  $R_1 = 778,488$  m.

Tablica 2

Końcowy fragment obliczeń przy wyznaczaniu promienia łuku z krzywymi przejściowymi

| $R_1$ [m] | $\alpha_1$ [rad] | $x_A$ [m] | $x_{M1}$ [m] | $s_1$ [rad] | $\Delta x_{KP}$ [m] | $\Delta x_{LK}$ [m] | $\Delta x$ [m]   |
|-----------|------------------|-----------|--------------|-------------|---------------------|---------------------|------------------|
| 778,492   | 1,047198         | -479,084  | -297,364     | 0,41331746  | 181,7207            | 297,3656            | 0,0020607        |
| 778,491   | 1,047198         | -479,084  | -297,364     | 0,41331726  | 181,7207            | 297,3651            | 0,0015620        |
| 778,490   | 1,047198         | -479,084  | -297,364     | 0,41331706  | 181,7207            | 297,3646            | 0,0010633        |
| 778,489   | 1,047198         | -479,084  | -297,364     | 0,41331686  | 181,7207            | 297,3641            | 0,0005646        |
| 778,488   | 1,047198         | -479,084  | -297,364     | 0,41331667  | 181,7207            | 297,3636            | <b>0,0000659</b> |
| 778,487   | 1,047198         | -479,084  | -297,364     | 0,41331647  | 181,7207            | 297,3631            | -0,000433        |
| 778,486   | 1,047198         | -479,084  | -297,364     | 0,41331627  | 181,7207            | 297,3626            | -0,000931        |

[Opracowanie własne].

Tablica 3

Wyznaczenie wartości  $l_1$  i  $R_1$  na podstawie kryteriów prędkości

| $l_1$ [m] | $h_{\max}$ [mm] | $f_{dop}$ [mm/s] | $V^{(f)}$ [km/h] | $R_1$ [m]      | $a_{dop}$ [m/s <sup>2</sup> ] | $V^{(a)}$ [km/h] | $a_{dop}$ [m/s <sup>3</sup> ] | $V^{(\psi)}$ [km/h] |
|-----------|-----------------|------------------|------------------|----------------|-------------------------------|------------------|-------------------------------|---------------------|
| 200       | 150             | 28               | 134,40           | 782,930        | 0,85                          | 136,304          | 0,5                           | 423,529             |
| 205       | 150             | 28               | 137,76           | <b>778,488</b> | 0,85                          | 135,917          | 0,5                           | 444,706             |
| 210       | 150             | 28               | 141,12           | 774,042        | 0,85                          | 135,528          | 0,5                           | 465,882             |

[Opracowanie własne].

Postępując według przedstawionego schematu, uzyskano zestaw danych liczbowych, które pozwoliły stworzyć układ oznaczony kolorem zielonym na rysunku 2. Promienie łuków kołowych wynoszą:  $R_1 = 778,488$  m,  $R_2 = 741,578$  m, a współrzędne ich środków są następujące:  $x_{P1} = 0$ ,  $y_{P1} = -893,564$  m oraz  $x_{P2} = 939,500$  m,  $y_{P2} = 339,814$  m. Zastosowano symetryczne krzywe przejściowe o długościach  $l_1 = 205$  m i  $l_2 = 200$  m. Współrzędne punktów charakterystycznych A, B i C pozostają takie same jak poprzednio, natomiast na końcach krzywych przejściowych wynoszą:  $x_{M1} = -297,364$  m,  $y_{M1} = -182,059$  m,  $x_{N1} = 297,364$  m,  $y_{N1} = -182,059$  m,  $x_{M2} = 656,464$  m,  $y_{M2} = -368,642$  m oraz  $x_{N2} = 1095,213$  m,  $y_{N2} = -407,028$  m.

Wykres krzywizny na długości układu geometrycznego z krzywymi przejściowymi (rys. 2) pokazano na rysunku 3 (oznaczony kolorem zielonym).

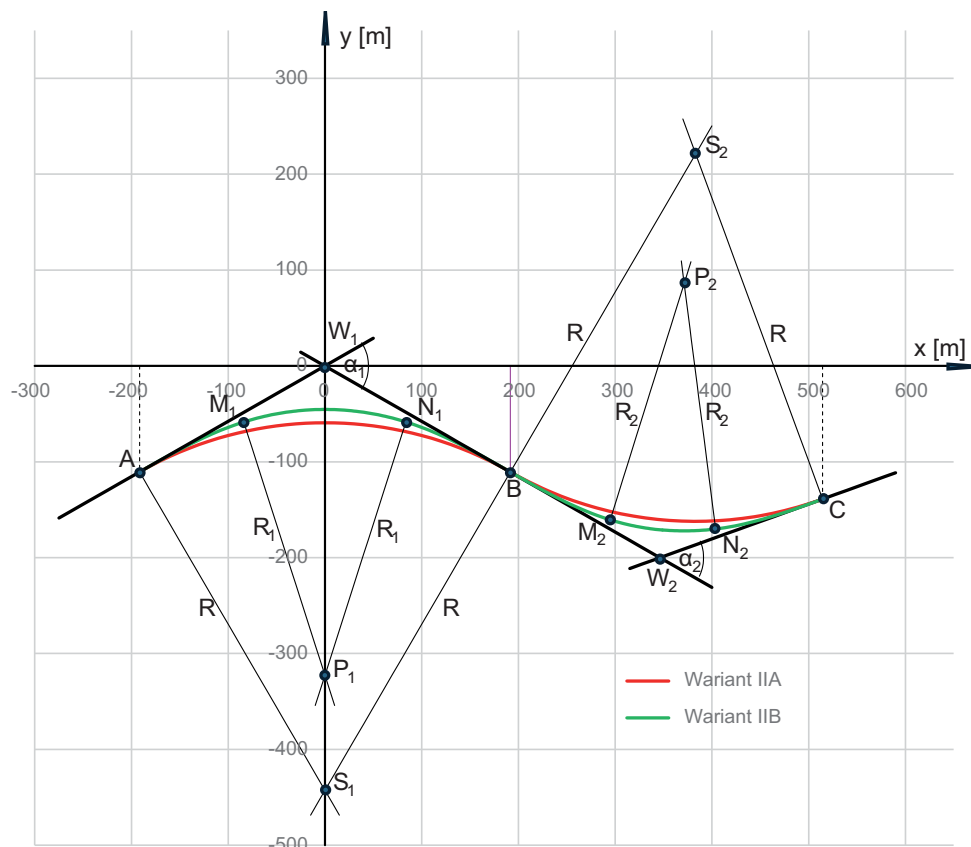
W rozpatrywanym przypadku maksymalna prędkość jazdy pociągów na danym układzie łuków odwrotnych wynika z wartości mniejszego promienia łuku (tj. promienia  $R_2$ ). Wartość  $\Delta\kappa$  we wzorze (4) wynosi  $\Delta\kappa = 1/R_2$ ,  $\Delta h$  we wzorach (4) i (5) jest równa  $\Delta h = h_2$ , zaś  $\Delta l$  we wzorach (5) i (6) to  $\Delta l = l_2$ . Dla promienia  $R_2 = 741,578$  m, zastosowanej na tym łuku przechyłki  $h_2 = 150$  mm i długości krzywej przejściowej  $l_2 = 200$  m, prędkość  $V^{(a)} = 132,655$  km/h,  $V^{(b)} = 134,400$  km/h,

a  $V^{(\psi)} = 423,529$  km/h. Możliwa do uzyskania prędkość wynosi zatem  $V_{\max} = 132$  km/h. Jak widać, przy znacznej odległości pomiędzy punktami głównymi trasy, łuki odwrotne nie wprowadzają istotnego ograniczenia prędkości jazdy pociągów.

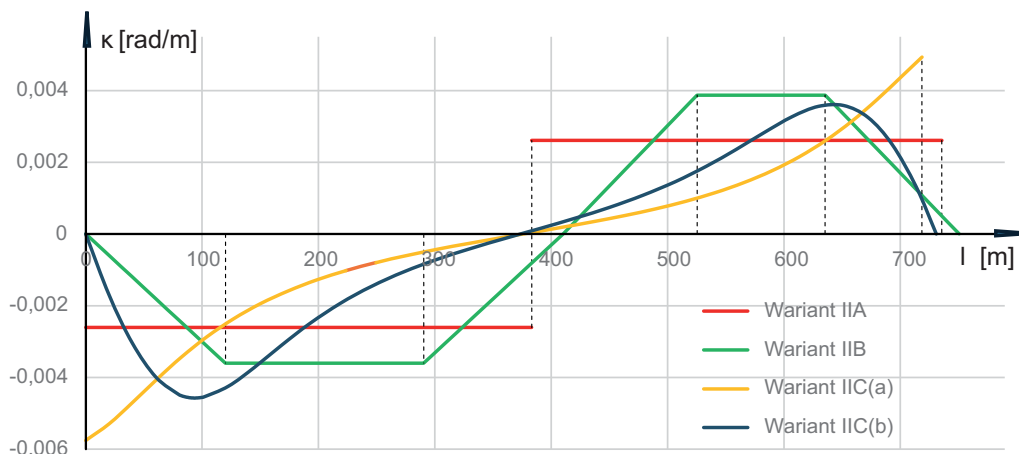
#### 4. Przypadek ograniczonej odległości pomiędzy punktami głównymi łuku odwrotnego (Układ II)

##### 4.1. Zastosowanie łuków kołowych (Wariant IIA)

Stosując analogiczną procedurę jak poprzednio, wyznaczono iteracyjnie promienie pierwotnych łuków odwrotnych dla Układu II, w którym  $W_1W_2 = 400$  m; wynoszą one  $R = 383,267$  m. Współrzędne punktów charakterystycznych są następujące:  $x_A = -191,634$  m,  $y_A = -110,640$  m,  $x_B = 191,634$  m,  $y_B = -110,640$  m,  $x_C = 514,353$  m,  $y_C = -138,874$  m. Wstawione łuki odwrotne o promieniu  $R$  do układu geometrycznego pokazano na rysunku 4 (oznaczone kolorem czerwonym). Współrzędne środków tych łuków wynoszą:  $x_{S1} = 0$ ,  $y_{S1} = -442,559$  m oraz  $x_{S2} = 383,267$  m,  $y_{S2} = 221,280$  m.



Rys. 4. Wyznaczone standardowe układy geometryczne łuków odwrotnych dla Układu II ( $W_1W_2 = 400$  m) [opracowanie własne]



Rys. 5. Wykresy krzywizny na długości standardowych układów geometrycznych i wyznaczonych krzywych łączących punkty A i C w Układzie II [opracowanie własne]

Wykres krzywizny na długości tego układu geometrycznego został pokazany na rysunku 5 (również oznaczony kolorem czerwonym). Podobnie jak w odpowiednim wariantcie Układu I, występują na nim skokowe zmiany krzywizny, które mają kluczowe znaczenie przy określaniu możliwej do uzyskania prędkości jazdy pociągów.

Tak jak poprzednio, w podanej sytuacji nie występuje przechyłka na łukach kołowych (czyli  $\Delta h = h_0 = 0$ ); przy wyznaczaniu prędkości założono  $\Delta l = l_b = 20$  m. Na podstawie wzoru (4) uzyskano  $V^{(a)} = 64,977$  m, a na podstawie wzoru (6)  $V^{(\psi)} = 42,353$  km/h. Możliwą do uzyskania prędkość  $V_{\max} = 42$  km/h należy zatem podnieść przez wprowadzenie krzywych przejściowych.

#### 4.2. Zastosowanie łuków kołowych z krzywymi przejściowymi (Wariant IIB)

Na rysunku 4 został również zamieszczony zaprojektowany układ z krzywymi przejściowymi (oznaczony kolorem zielonym). Dla przyjętej przechyłki na obu łukach  $h = 150$  mm zastosowano symetryczne krzywe przejściowe w postaci kłotoidy o długościach  $l_1 = 120$  m i  $l_2 = 115$  m. Wyznaczone w sposób analogiczny jak poprzednio (czyli iteracyjnie) promienie łuków odwrotnych uległy zmniejszeniu w porównaniu do promienia  $R$  i wynoszą:  $R_1 = 277,346$  m,  $R_2 = 257,969$  m, a współrzędne ich środków są następujące:  $x_{p1} = 0$ ,  $y_{p1} = -442,559$  m oraz  $x_{p2} = 371,434$  m,  $y_{p2} = 86,029$  m. Współrzędne punktów charakterystycznych A, B i C są takie same jak poprzednio, natomiast na końcach krzywych przejściowych wynoszą:  $x_{M1} = -191,634$  m,  $y_{M1} = -110,640$  m,  $x_{N1} = 191,634$  m,  $y_{N1} = -110,640$  m,  $x_{M2} = 294,990$  m,  $y_{M2} = -160,481$  m oraz  $x_{N2} = 403,912$  m,  $y_{N2} = -170,010$  m.

Wykres krzywizny na długości układu geometrycznego z krzywymi przejściowymi (patrz rys. 4) pokazano na rysunku 5 (oznaczony kolorem zielonym).

Maksymalna prędkość jazdy pociągów na danym układzie łuków odwrotnych wynika z wartości promienia mniejszego łuku (tj. promienia  $R_2$ ). Dla promienia  $R_2 = 257,969$  m, zastosowanej na tym łuku przechyłki  $h_2 = 150$  mm i długości krzywej przejściowej  $l_2 = 115$  m, prędkość  $V^{(a)} = 78,240$  km/h,  $V^{(l)} = 77,280$  km/h, a  $V^{(\psi)} = 243,529$  km/h. Możliwa do uzyskania prędkość wynosi zatem  $V_{\max} = 77$  km/h. Stanowi to znaczne ograniczenie w porównaniu do analogicznego przypadku w Układzie I. Podjęto zatem próbę odejścia od standardowego rozwiązania problemu i wyznaczenia krzywej łączącej ze sobą w sposób bezpośredni punkty A i C.

#### 4.3. Zastosowanie bezpośredniego połączenia punktów skrajnych (Wariant IIC)

Rozpatrywany problem może być rozwiązany w całkiem odmienny sposób. Szukane połączenie punktów skrajnych A i C nie wymaga uwzględniania punktu B, który może zostać pominięty. Współrzędne punktów A i C dla rozpatrywanego przypadku zostały określone w podrozdziale 4.1. Znane są również wartości nachylenia stycznej w tych punktach; wynoszą one:  $s_A = s_1 = 0,57735$ ,  $s_C = s_3 = 0,36397$ . W celu uproszczenia procedury wyznaczania krzywej łączącej, wprowadzono związany z tą krzywą pomocniczy układ współrzędnych  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ . Układ ten powstaje po dokonaniu obrotu układu  $x$ ,  $y$  w prawo o kąt  $\varphi_1 = 0,523599$  rad i przesunięciu punktu początkowego w lewo o wartość  $\overline{AW_1}$ . Obowiązują następujące wzory transformacyjne:

$$\bar{x} = x \cdot \cos \varphi_1 + y \cdot \sin \varphi_1 + \overline{AW_1}, \quad (8)$$

$$\bar{y} = -x \cdot \sin \varphi_1 + y \cdot \cos \varphi_1, \quad (9)$$

$$\text{gdzie: } \overline{AW_1} = \sqrt{(x_{w1} - x_A)^2 + (y_{w1} - y_A)^2} = \bar{x}_{w1}.$$

W układzie  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  warunki dotyczące punktu A (tj. dla  $\bar{x} = 0$ ) są następujące:

$$\bar{x}_A = 0, \bar{y}_A = 0, \bar{s}_A = 0,$$

dotyczące zaś punktu C:

$$\bar{x}_C = x_C \cdot \cos \varphi_1 + y_C \cdot \sin \varphi_1 + \overline{AW_1},$$

$$\bar{y}_C = -x_C \cdot \sin \varphi_1 + y_C \cdot \cos \varphi_1, \bar{s}_C = \tan(\varphi_3 - \varphi_1).$$

Wprowadzono również dodatkowe oznaczenia:

$$\Delta \bar{x} = \bar{x}_C - \bar{x}_A = \bar{x}_C, \Delta \bar{y} = \bar{y}_C - \bar{y}_A = \bar{y}_C.$$

Elementarna postać krzywej łączącej powinna spełniać następujące warunki brzegowe:

$$\begin{cases} \bar{y}(0) = 0 & \bar{y}(\Delta \bar{x}) = \Delta \bar{y} \\ \bar{y}'(0) = 0 & \bar{y}'(\Delta \bar{x}) = \bar{s}_C \end{cases} \quad (10)$$

oraz przyjęte równanie różniczkowe (dla rozwiązania wielomianowego):

$$\bar{y}^{(4)}(\bar{x}) = 0. \quad (11)$$

Ogólne rozwiązanie problemu różniczkowego (10), (11) stanowi wielomian trzeciego stopnia:

$$\bar{y}(\bar{x}) = a_1 \cdot \bar{x}^2 + a_2 \cdot \bar{x}^3 \quad (12)$$

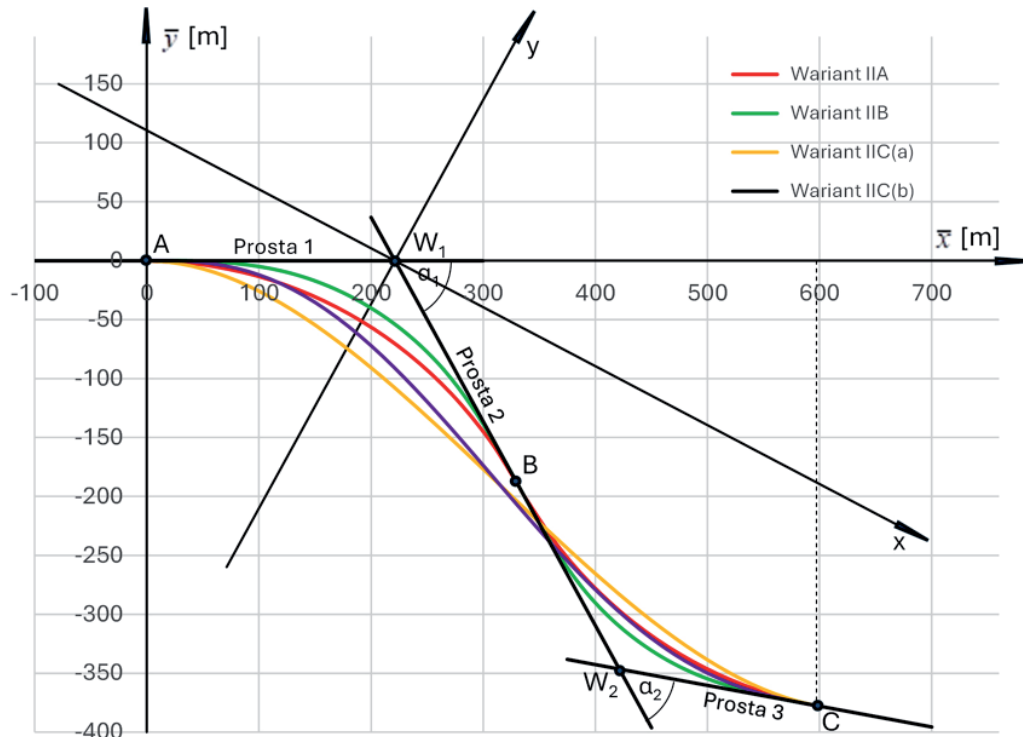
$$\text{gdzie: } a_1 = -\frac{\bar{s}_C \cdot \Delta \bar{x} - 3 \cdot \Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}^2}, a_2 = \frac{\bar{s}_C \cdot \Delta \bar{x} - 2 \cdot \Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}^3}.$$

W rozpatrywanym przypadku  $\Delta \bar{x} = 597,285$  m,  $\Delta \bar{y} = -377,444$  m,  $\bar{s}_C = -0,176327$ ; uzyskane współczynniki równania (12) wynoszą:  $a_1 = -0,0028788$  1/m,  $a_2 = 3,04847E-06$  1/m<sup>2</sup>. Przebieg krzywej łączącej (określonej jako Wariant IIC(a)) – na tle rozwiązań standardowych z wariantów IIA i IIB – pokazano na rysunku 6 (oznaczony kolorem pomarańczowym).

Na podstawie rysunku 6 trudno byłoby dokonać oceny krzywej łączącej w Wariantcie IIC(a) i porównać z rozwiązaniami uzyskanymi w Wariantcie IIA i Wariantcie IIB. Odpowiednim kryterium może się tutaj okazać wykres krzywizny na długości. Ogólny wzór na krzywiznę  $\kappa(\bar{x})$  wyznaczonej krzywej jest następujący:

$$\kappa(\bar{x}) = \frac{|\bar{y}''(\bar{x})|}{\left\{ \sqrt{1 + [\bar{y}'(\bar{x})]^2} \right\}^3} \quad (13)$$

gdzie:  $\bar{y}'(\bar{x}) = 2 \cdot a_1 \cdot \bar{x} + 3 \cdot a_2 \cdot \bar{x}^2$ ,  $\bar{y}''(\bar{x}) = 2 \cdot a_1 + 6 \cdot a_2 \cdot \bar{x}$ .



Rys. 6. Przebieg krzywych łączących w Wariantach IIC(a) i IIC(b) na tle standardowych układów geometrycznych [opracowanie własne]

Aby uzyskać wartości krzywizny na długości, należało wykorzystać Kalkulator długości łuku krzywej [10], w którym do całkowania została wykorzystana reguła Simpsona. Wykres  $\kappa(l)$  dla Wariantu IIC(a) przedstawiono na rysunku 5 (oznaczony kolorem pomarańczowym). Jak widać, w punkcie początkowym i punkcie końcowym występują skokowe zmiany krzywizny; nie jest to więc rozwiązanie godne polecenia. Największa bezwzględna wartość krzywizny występuje dla  $l = 0$  i wynosi  $\kappa = 0,0057576$  rad/m. W tym miejscu powinna występować największa wartość przechyłki, co jest technicznie niewykonalne (skokowa zmiana przechyłki w rzeczywistym torze nie może występować). Zatem w omawianym układzie geometrycznym ma miejsce taka sama sytuacja jak w Wariacie IIA.

Z wartości krzywizny w punkcie początkowym – na podstawie wzoru (4) – wynika  $V^{(a)} = 43,741$  km/h. W kontekście prędkości  $V^{(\psi)}$  istotny jest wskaźnik  $\Delta\kappa/\Delta l$ . Jego największa wartość występuje dla  $l \in \langle 40,319; 61,015 \rangle$  m. Oznacza to, że  $\Delta\kappa = 0,0006425$  rad/m, więc do wzoru (6) należy podstawić  $\Delta a = 0,0948$  m/s<sup>2</sup> oraz  $\Delta l = 20,696$  m; otrzymuje się wówczas  $V^{(\psi)} = 392,776$  km/h. Możliwa do uzyskania prędkość w Wariacie IIC(a) to  $V_{\max} = 43$  km/h. W tej sytuacji wariant ten nie stanowi korzystnego rozwiązania problemu.

Ponieważ warunki brzegowe (10) nie obejmują wartości krzywizny występującej w punktach A i C, postanowiono warunki te odpowiednio zmodyfikować. Aby uwzględnić krzywiznę osi toru, należy uwzględnić wzór (13), zapisując go w następującej postaci:

$$\bar{y}''(\bar{x}) = \left\{ \sqrt{1 + [\bar{y}'(\bar{x})]^2} \right\}^3 \kappa(\bar{x}) \quad (14)$$

W punktach A i C wartości  $\kappa(\bar{x})$  są równe zeru, zatem – na podstawie wzoru (14) – zerują się tam drugie pochodne funkcji  $\bar{y}(\bar{x})$ . Prowadzi to do skorygowania warunków (10); dla krzywej łączącej określonej jako Wariant IIC(b) – te przyjmują postać:

$$\begin{cases} \bar{y}(0) = 0 & \bar{y}(\Delta\bar{x}) = \Delta\bar{y} \\ \bar{y}'(0) = 0 & \bar{y}'(\Delta\bar{x}) = \bar{s}_c \\ \bar{y}''(0) = 0 & \bar{y}''(\Delta\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

W danej sytuacji należy przyjąć równanie różniczkowe:

$$\bar{y}^{(6)}(\bar{x}) = 0. \quad (16)$$

Rozwiązaniem problemu różniczkowego (15), (16) jest wielomian piątego stopnia:

$$\bar{y}(\bar{x}) = a_1 \cdot \bar{x}^3 + a_2 \cdot \bar{x}^4 + a_3 \cdot \bar{x}^5 \quad (17)$$

$$\text{gdzie: } a_1 = \frac{10 \cdot \Delta\bar{y} - 4 \cdot \bar{s}_c \cdot \Delta\bar{x}}{\Delta\bar{x}^3},$$

$$a_2 = -\frac{15 \cdot \Delta\bar{y} - 7 \cdot \bar{s}_c \cdot \Delta\bar{x}}{\Delta\bar{x}^4}, \quad a_3 = \frac{6 \cdot \Delta\bar{y} - 3 \cdot \bar{s}_c \cdot \Delta\bar{x}}{\Delta\bar{x}^5}.$$

W rozpatrywanym przypadku współczynniki wielomianu (17) są następujące:  $a_1 = -1,57366\text{E-}05$  1/m<sup>2</sup>,  $a_2 = 3,86929\text{E-}08$  1/m<sup>3</sup>,  $a_3 = -2,56355\text{E-}11$  1/m<sup>4</sup>. Wyznaczoną krzywą łączącą w Wariacie IIC(b) – na tle rozwiązań standardowych i krzywej z Wariantu IIC(a) – pokazano na rysunku 6 (oznaczoną kolorem fioletowym).

Do wyznaczenia krzywizny należy wykorzystać wzór (13), wstawiając wartości pochodnych:

$$\bar{y}'(\bar{x}) = 3 \cdot a_1 \cdot \bar{x}^2 + 4 \cdot a_2 \cdot \bar{x}^3 + 5 \cdot a_3 \cdot \bar{x}^4,$$

$$\bar{y}''(\bar{x}) = 6 \cdot a_1 \cdot \bar{x} + 12 \cdot a_2 \cdot \bar{x}^2 + 20 \cdot a_3 \cdot \bar{x}^3.$$

Wykres  $\kappa(l)$  dla Wariantu IIC(b) przedstawiono na rysunku 5 (oznaczony kolorem fioletowym). Z wartości  $\kappa(l)$  wynikają bezpośrednio wartości przechyłki  $h(l)$  na podstawie zależności

$$h(l) = \frac{h_0}{\kappa_{\max}} \kappa(l). \quad (18)$$

Największa bezwzględna wartość krzywizny występuje dla  $l_0 = 93,893$  m i wynosi  $\kappa_{\max} = 0,0045743$  rad/m. Przy wyznaczaniu prędkości  $V^{(a)}$  z wykorzystaniem wzoru (4) należy przyjąć  $\Delta\kappa = \kappa_{\max}$  i  $\Delta h = h_0$  (gdzie  $h_0$  oznacza wartość zastosowanej przechyłki w miejscu występowania największej krzywizny). Prędkość  $V^{(a)}$  jest tym większa, im większe jest  $h_0$ .

Natomiast największa wartość  $\Delta\kappa/\Delta l$ , istotna z perspektywy prędkości  $V^{(f)}$  i  $V^{(\psi)}$ , występuje na początku krzywej łączącej dla  $l \in \langle 0; 20,0006 \rangle$  m. Przy wyznaczaniu prędkości  $V^{(f)}$  z wykorzystaniem wzoru (5) należy przyjąć  $\Delta\kappa = 0,001706$  rad/m i  $\Delta h$  równe wartości przechyłki określonej za pomocą wzoru (18) dla  $l = \Delta l = 20,0006$  m. Prędkość  $V^{(f)}$  maleje wraz ze wzrostem przyjętego  $h_0$ .

W rozpatrywanym przypadku zbliżone do siebie prędkości  $V^{(a)}$  i  $V^{(f)}$  uzyskano dla  $h_0 = 85$  mm; wyniosły one:  $V^{(a)} = 63,113$  km/h i  $V^{(f)} = 63,597$  km/h. Ponieważ z wzoru (7) wynika  $\Delta a = 0,317$  m/s<sup>2</sup>, prędkość  $V^{(\psi)} = 113,567$  km/h. W Wariacie IIC(b) można zatem uzyskać prędkość  $V_{\max} = 63$  km/h. Jest to wyrażenie mniej niż w przypadku zastosowania łuków kołowych z krzywymi przejściowymi (czyli w Wariacie IIB). Przedstawionego rozwiązania nie można zatem rekomendować do praktycznego wykorzystania.

#### 4.4. Zastosowanie wydłużonej krzywej łączącej (Wariant IID)

Idea wyznaczania krzywej łączącej zaprezentowana w podrozdziale 4.3 i dotycząca rozwiązania z wykorzystaniem wzoru (17) może jednak zostać rozszerzona. Krzywa ta nie musi przecież łączyć ze sobą punktów A i C, wynikających z położenia wstawionych łuków kołowych (odwrotnych). Mogą to być inne, wybrane punkty usytuowane na *Prostej 1* i *Prostej 3*. Nie ulega też wątpliwości, że nowa krzywa powinna zostać wydłużona. Wydłużenie to może być wynikiem przesunięcia punktu A w lewo o wartość  $\Delta L_A$ , przesunięcia punktu C w prawo o wartość  $\Delta L_C$  lub jednocześnie przesunięcia obydwu tych punktów (co powinno być najkorzystniejsze). Ponieważ wartości  $\Delta L_A$  i  $\Delta L_C$  są w zasadzie dowolne (ściślej zaś – ograniczone występującą sytuacją geometryczną), liczba uzyskanych rozwiązań może być bardzo duża. Wyznaczone krzywe łączące zostaną określone jako krzywe  $K\bar{L}(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ; mieści się wśród nich również Wariant IIC(b) jako krzywa  $K\bar{L}0$ .

W układzie  $x, y$ , dla przyjętego  $\Delta L_{A(i)}$  nowy punkt początkowy  $A(i)$  na *Prostej 1* ma współrzędne:

$$x_{A(i)} = x_A - \Delta L_{A(i)} \cdot \cos \varphi_1 \quad (19)$$

$$y_{A(i)} = y_A + \Delta L_{A(i)} \cdot \sin \varphi_1, \quad (20)$$

natomiast dla przyjętego  $\Delta L_{C(i)}$  współrzędne odpowiedniego punktu końcowego  $C(i)$  na *Prostej 3* są następujące:

$$x_{C(i)} = x_C + \Delta L_{C(i)} \cdot \cos \varphi_3 + \Delta L_{A(i)} \cdot \cos \varphi_1 \quad (21)$$

$$y_{C(i)} = y_C + \Delta L_{C(i)} \cdot \sin \varphi_3. \quad (22)$$

W rozpatrywanym przypadku założono jednakowe wartości  $\Delta L_{A(i)}$  i  $\Delta L_{C(i)}$ , tj.  $\Delta L_{A(i)} = \Delta L_{C(i)} = \Delta L_{(i)}$ . Krzywą łączącą  $K\bar{L}1$  wyznaczono przyjmując  $\Delta L_1 = 50$  m. Współrzędne skrajnych punktów tej krzywej w układzie  $x, y$  wynoszą:  $x_{A1} = -234,935$  m,  $y_{A1} = -135,640$  m oraz  $x_{C1} = 514,353$  m,  $y_{C1} = -138,874$  m.

Dla wydłużonej krzywej łączącej wprowadzono związany z tą krzywą pomocniczy układ współrzędnych  $\bar{x}_{(i)}, \bar{y}_{(i)}$ , przez dokonanie obrotu układu  $x, y$  w prawo o kąt  $\varphi_1 = 0,523599$  rad i przesunięcie punktu początkowego w lewo o wartość  $A_{(i)}W_1$ . Dla rzędnej  $\bar{y}_{(i)}$  nadal obowiązuje wzór (9), zaś dla odciętej  $\bar{x}_{(i)}$  wzór transformacyjny:

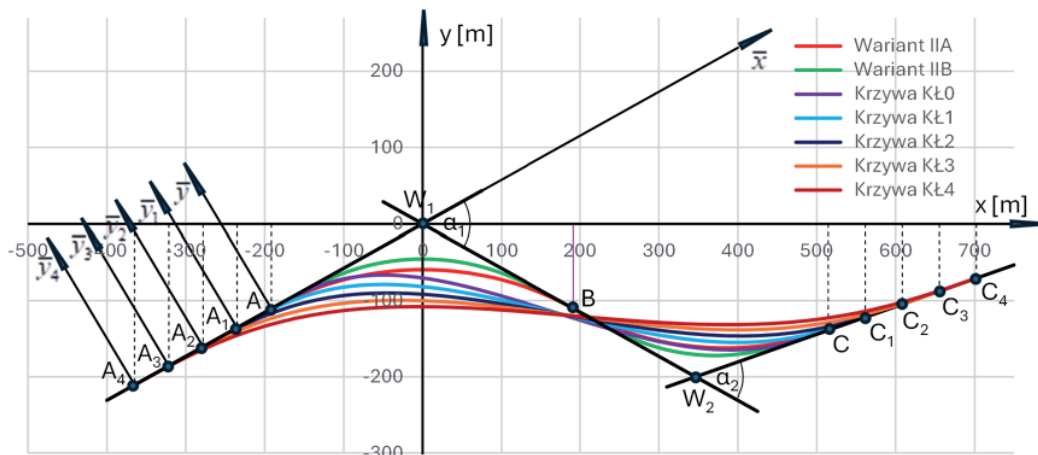
$$\bar{x}_{(i)} = x \cdot \cos \varphi_1 + y \cdot \sin \varphi_1 + \overline{A_{(i)}W_1}, \quad (23)$$

gdzie:

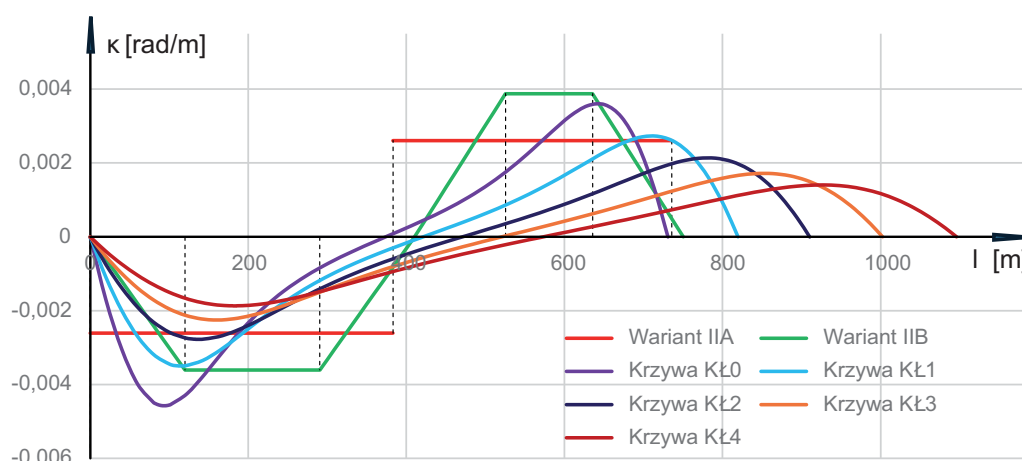
$$\overline{A_{(i)}W_1} = \sqrt{(x_{W1} - x_{A(i)})^2 + (y_{W1} - y_{A(i)})^2} = \bar{x}_{W1}.$$

W rozpatrywanym przypadku należy połączyć ze sobą punkt  $A_1(0, 0)$  z punktem  $C_1$  o współrzędnych  $\bar{x}_{C1} = \Delta \bar{x} = 696,525$  m,  $\bar{y}_{C1} = \Delta \bar{y} = -386,127$  m, przy czym  $\bar{s}_{A1} = 0$ ,  $\bar{s}_{C1} = -0,17633$ . Współczynniki wielomianu (17) są następujące:  $a_1 = -9,97287E-06$  1/m<sup>2</sup>,  $a_2 = 2,09552E-08$  1/m<sup>3</sup>,  $a_3 = -1,188E-11$  1/m<sup>4</sup>. Wyznaczoną krzywą łączącą  $K\bar{L}1$  – na tle rozwiązań standardowych oraz krzywych łączących  $K\bar{L}0$ ,  $K\bar{L}2$ ,  $K\bar{L}3$  i  $K\bar{L}4$  – pokazano na rysunku 7 (oznaczoną kolorem jasnoniebieskim).

Wykres  $\kappa(l)$  dla krzywej łączącej  $K\bar{L}1$  przedstawiono na rysunku 8 (oznaczony kolorem jasnoniebieskim). Największa bezwzględna wartość krzywizny występuje dla  $l_0 = 114,968$  m i wynosi  $\kappa_{\max} = 0,0035019$  rad/m. Z kolei największa wartość  $\Delta \kappa / \Delta l$  występuje na początku krzywej dla  $l \in \langle 0; 20,0003 \rangle$  m. Zbliżone do siebie prędkości  $V^{(a)}$  i  $V^{(f)}$  uzyskano dla  $h_0 = 90$  mm;



Rys. 7. Wyznaczone krzywe łączące  $K\bar{L}0$ ,  $K\bar{L}1$ ,  $K\bar{L}2$ ,  $K\bar{L}3$  i  $K\bar{L}4$  dla Układu II na tle rozwiązań standardowych w Wariancie IIA i Wariancie IIB [opracowanie własne]



Rys. 8. Wykresy krzywizny na długości krzywych łączących KŁ0, KŁ1, KŁ2, KŁ3 i KŁ4 dla Układu II na tle rozwiązań standardowych w Wariancie IIA i Wariancie IIB [opracowanie własne]

wyniosły one:  $V^{(a)} = 72,966$  km/h i  $V^{(f)} = 71,452$  km/h. Ponieważ z wzoru (7) wynika  $\Delta a = 0,258$  m/s<sup>2</sup>, prędkość  $V^{(\psi)} = 139,427$  km/h. Na krzywej KŁ1 można zatem uzyskać prędkość  $V_{\max} = 71$  km/h. W dalszym ciągu jest to mniej niż w przypadku zastosowania łuków kołowych z krzywymi przejściowymi. Jak wynika z rysunku 8, w rejonie początkowym nachylenie wykresu krzywizny (i odpowiadającej rampy przechyłkowej) dla Wariantu IIB jest korzystniejsze (czyli mniejsze).

Kontynuowano dalej wydłużanie krzywej łączącej, przyjmując  $\Delta L_2 = 100$  m dla krzywej KŁ2,  $\Delta L_3 = 150$  m dla krzywej KŁ3 oraz  $\Delta L_4 = 200$  m dla krzywej KŁ4. W tabelicy 4 zestawiono podstawowe wartości liczbowe odnoszące się do wyznaczania przebiegu krzywych łączących (nachylenia  $\overline{s}_{A(i)} = 0$ ,  $\overline{s}_{C(i)} = -0,17633$ ).

Wyznaczone krzywe łączące z tabelicy 4 pokazano na rysunku 7 (na tle rozwiązań standardowych). Ocena tych krzywych wymaga przeprowadzenia analizy krzywizny występującej na ich długości. Wykresy

krzywizny dla krzywych z rysunku 7 zostały przedstawione na rysunku 8.

Na podstawie wyznaczonej krzywizny (oraz odpowiadającej przechyłki) stało się możliwe wyznaczenie prędkości jazdy pociągów na danym układzie geometrycznym. Obrazuje to tabela 5, w której przez  $\max(\Delta h/\Delta l)$  oznaczono wyrażenie występujące we wzorze (5). W każdym rozpatrywanym przypadku wartość ta występuje w rejonie początkowym krzywej łączącej, podobnie jak wskaźnik  $\max(\Delta \kappa/\Delta l)$ .

W rozwiązaniu standardowym z krzywymi przejściowymi prędkość  $V_{\max} = 77$  km/h, a długość układu geometrycznego wynosi 750,557 m. Zastosowanie krzywej łączącej o długości 1095,950 m pozwala zwiększyć prędkość do  $V_{\max} = 100$  km/h. Stanowi to niewątpliwie korzystne rozwiązanie, oczywiście pod warunkiem, że nie pojawią się przy tym jakieś obiektywne przeszkody (wynikające np. z uwarunkowań terenowych). Nie ulega jednak wątpliwości, że zaproponowana metoda modyfikacji łuków odwrotnych stwarza dużą szansę na rozwiązywanie pojawiających się problemów.

Tablica 4

Podstawowe wartości liczbowe dotyczące wyznaczania krzywych łączących w Układzie II

| Krzywa łącząca | $\Delta L_{(i)}$ [m] | $\Delta \bar{x}$ [m] | $\Delta \bar{y}$ [m] | $a_1$ [1/m <sup>2</sup> ] | $a_2$ [1/m <sup>3</sup> ] | $a_3$ [1/m <sup>4</sup> ] |
|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| KŁ0            | 0                    | 597,285              | -377,445             | -1,57366E-05              | 3,86929E-08               | -2,56355E-11              |
| KŁ1            | 50                   | 696,525              | -386,127             | -9,97287E-06              | 2,09552E-08               | -1,18843E-11              |
| KŁ2            | 100                  | 795,766              | -394,809             | -6,72107E-06              | 1,23192E-08               | -6,10441E-12              |
| KŁ3            | 150                  | 895,006              | -403,492             | -4,74754E-06              | 7,71077E-09               | -3,39117E-12              |
| KŁ4            | 200                  | 994,246              | -412,174             | -3,48022E-06              | 5,07113E-09               | -2,00410E-12              |

[Opracowanie własne].

Tablica 5

Kalkulacja prędkości dla wyznaczonych krzywych łączących w Układzie II

| Krzywa łącząca | $\Delta L_{(i)}$ [m] | $L_{KL}$ [m] | $h_0$ [mm] | $\kappa_{\max}$ [rad/m] | $V^{(a)}$ [km/h] | $\max(\Delta h/\Delta l)$ [‰] | $V^{(f)}$ [km/h] | $V^{(\psi)}$ [km/h] | $V_{\max}$ [km/h] |
|----------------|----------------------|--------------|------------|-------------------------|------------------|-------------------------------|------------------|---------------------|-------------------|
| KŁ0            | 0                    | 731,037      | 85         | 0,0045743               | 63,113           | 1,58497                       | 63,598           | 113,567             | 63                |
| KŁ1            | 50                   | 819,606      | 90         | 0,0035019               | 72,966           | 1,41074                       | 71,452           | 139,427             | 71                |
| KŁ2            | 100                  | 910,248      | 90         | 0,0027727               | 82,002           | 1,21448                       | 82,998           | 151,116             | 82                |
| KŁ3            | 150                  | 1002,491     | 95         | 0,0022534               | 91,990           | 1,12399                       | 89,681           | 180,585             | 89                |
| KŁ4            | 200                  | 1095,950     | 95         | 0,0018699               | 100,981          | 0,99982                       | 100,818          | 187,812             | 100               |

[Opracowanie własne].

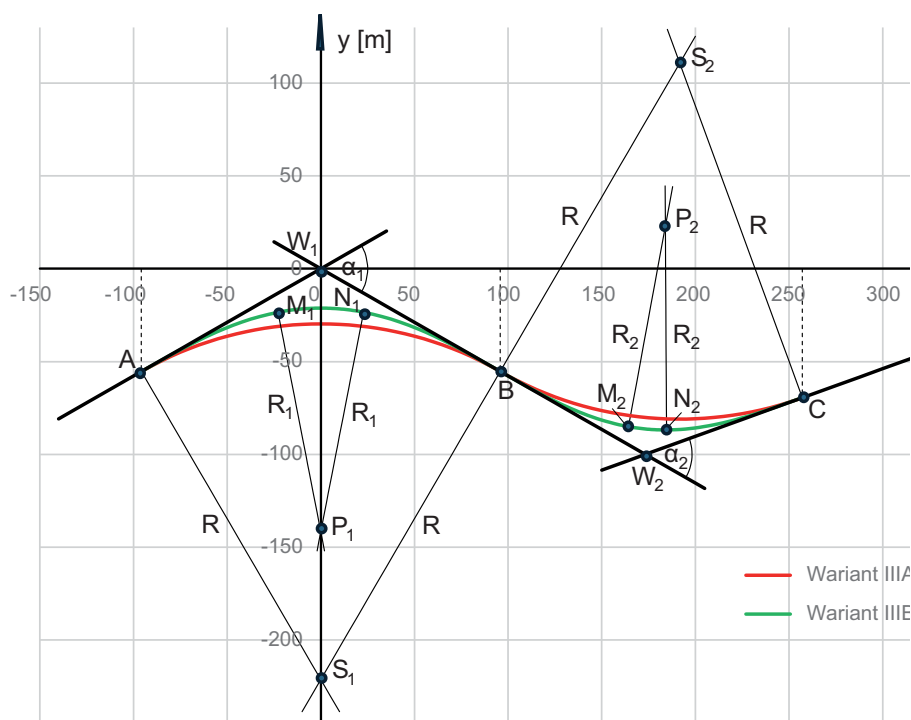
## 5. Przypadek niewielkiej odległości pomiędzy punktami głównymi łuku odwrotnego (Układ III)

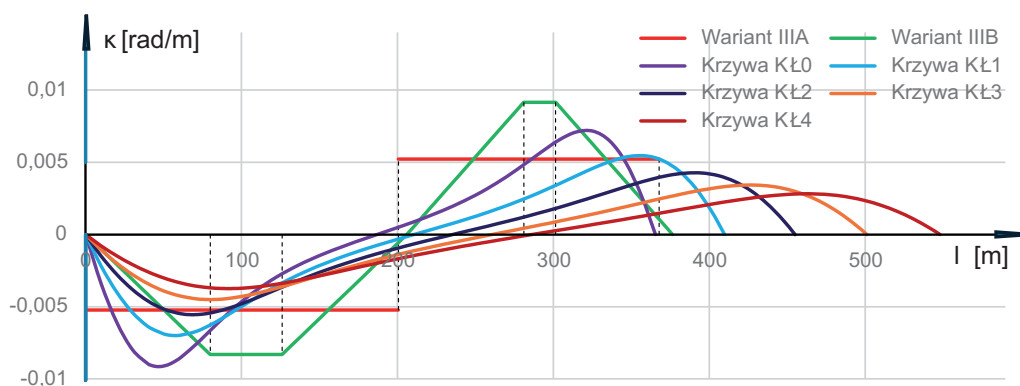
### 5.1. Zastosowanie łuków kołowych (Wariant IIIA)

W analogiczny sposób wyznaczono iteracyjnie promienie pierwotnych łuków odwrotnych dla Układu III, w którym  $\overline{W_1W_2} = 200$  m; wynoszą one  $R = 191,634$  m. Współrzędne punktów charakterystycznych są następujące:  $x_A = -95,817$  m,  $y_A = -55,320$  m,  $x_B = 95,817$  m,  $y_B = -55,320$  m,  $x_C = 257,176$  m oraz  $y_C = -69,4374$  m. Wstawione łuki

odwrotne o promieniu  $R$  do układu geometrycznego pokazano na rysunku 9 (oznaczone kolorem czerwonym). Współrzędne środków tych łuków wynoszą:  $x_{S1} = 0$ ,  $y_{S1} = -221,280$  m oraz  $x_{S2} = 191,634$  m,  $y_{S2} = 110,639$  m.

Wykres krzywizny na długości tego układu geometrycznego został pokazany na rysunku 10 (również oznaczony kolorem czerwonym). Tak jak w odpowiednich wariantach Układu I i Układu II występują na nim skokowe zmiany krzywizny. Zmiany te uniemożliwiają zastosowanie przechyłki na łukach kołowych (czyli  $\Delta h = h_0 = 0$ ). Zakładając  $\Delta l = l_b = 20$  m, na podstawie wzoru (4) uzyskano  $V^{(a)} = 45,946$  m, a na podstawie wzoru (6)  $V^{(\psi)} = 42,353$  km/h. Należy

Rys. 9. Wyznaczone standardowe układy geometryczne łuków odwrotnych dla Układu III ( $\overline{W_1W_2} = 200$  m) [opracowanie własne]



Rys. 10. Wykresy krzywizny na długości krzywych łączących KŁ0, KŁ1, KŁ2, KŁ3 i KŁ4 dla Układu III na tle rozwiązań standardowych w Wariancie IIIA i Wariancie IIIB [opracowanie własne]

sprawdzić, w jakim stopniu możliwą do uzyskania prędkość  $V_{\max} = 42$  km/h zwiększyłoby wprowadzenie krzywych przejściowych.

## 5.2. Zastosowanie łuków kołowych z krzywymi przejściowymi (Wariant IIIB)

Na rysunku 9 pokazano również zaprojektowany układ z krzywymi przejściowymi (oznaczony kolorem zielonym). Dla przyjętej przechyłki na obu łukach  $h = 150$  mm zastosowano symetryczne krzywe przejściowe w postaci kłoidy o długościach  $l_1 = 80$  m i  $l_2 = 75$  m. Wyznaczone promienie łuków odwrotnych uległy zmniejszeniu w porównaniu do promienia  $R$  i wynoszą:  $R_1 = 120,400$  m,  $R_2 = 109,249$  m, a współrzędne ich środków są następujące:  $x_{P1} = 0$ ,  $y_{P1} = -141,573$  m oraz  $x_{P2} = 183,976$  m,  $y_{P2} = 23,108$  m. Biorąc pod uwagę standardy obowiązujące na drogach kolejowych są to promienie bardzo małe, które nie spełniają wymagań konstrukcyjnych w układzie koło – szyna. Współrzędne punktów charakterystycznych A, B i C pozostają bez zmian, zaś na końcach krzywych przejściowych wynoszą:  $x_{M1} = -22,901$  m,  $y_{M1} = -23,371$  m,  $x_{N1} = 22,901$  m,  $y_{N1} = -23,371$  m,  $x_{M2} = 164,262$  m,  $y_{M2} = -85,012$  m oraz  $x_{N2} = 184,615$  m,  $y_{N2} = -86,793$  m.

Wykres krzywizny na długości układu geometrycznego z krzywymi przejściowymi (patrz rys. 9) pokazano na rysunku 10 (oznaczony kolorem zielonym).

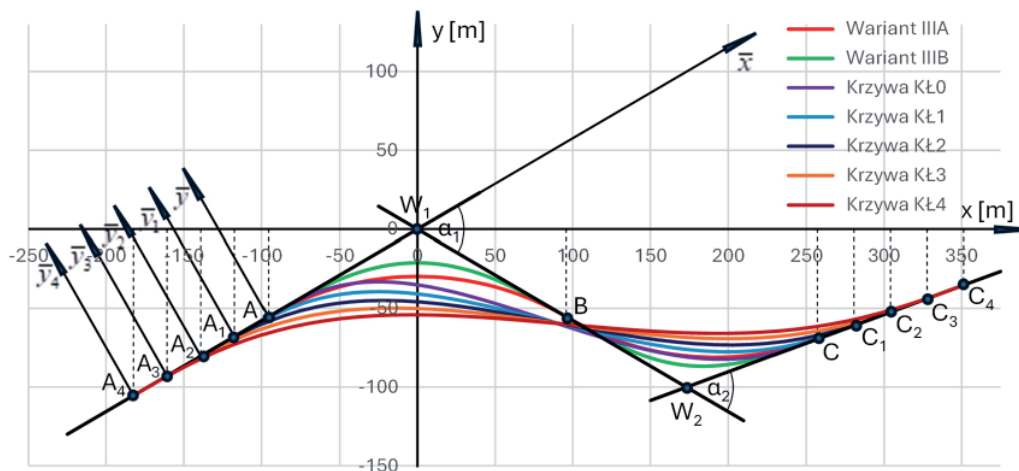
Maksymalna prędkość jazdy pociągów na danym układzie wynika z wartości mniejszego łuku. Dla promienia  $R_2 = 109,249$  m, zastosowanej na tym łuku przechyłki  $h_2 = 150$  mm i długości krzywej przejściowej  $l_2 = 75$  m, prędkość  $V^{(a)} = 58,916$  km/h,  $V^{(f)} = 50,400$  km/h, a  $V^{(\psi)} = 269,385$  km/h. Możliwa do uzyskania prędkość wynosi zatem  $V_{\max} = 50$  km/h. Można jednak poddać w wątpliwość możliwość zastosowania takiej prędkości ze względów konstrukcyjnych, tj. wpisywania się kół taboru kolejowego w tor

przy tak małych promieniach łuków kołowych. Postanowiono więc połączyć ze sobą punkty A i C w sposób bezpośredni, stosując gładką krzywą łączącą (jak w podrozdziale 4.3).

## 5.3. Zastosowanie gładkiej krzywej łączącej (Wariant IIIC)

Współrzędne punktów A i C dla rozpatrywanego przypadku zostały określone w podrozdziale 5.1. Wartości nachylenia stycznej w tych punktach są takie same, jakimi operowano poprzednio. Pomocniczy układ współrzędnych  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  powstaje po zastosowaniu wzorów transformacyjnych (8) i (9). Obowiązują warunki brzegowe (15) i równanie różniczkowe (16); krzywą łączącą opisuje równanie (17). W rozpatrywanym przypadku  $\Delta\bar{x} = 298,642$  m,  $\Delta\bar{y} = -188,723$  m,  $\bar{s}_c = -0,176327$ ; uzyskane współczynniki równania (17) wynoszą:  $a_1 = -6,29471E-05$  1/m<sup>2</sup>,  $a_2 = 3,09547E-07$  1/m<sup>3</sup>,  $a_3 = -4,10172E-10$  1/m<sup>4</sup>. Wyznaczoną krzywą łączącą KŁ0 – na tle rozwiązań standardowych oraz wydłużonych krzywych łączących z podrozdziału 5.4 pokazano na rysunku 11 (oznaczoną kolorem fioletowym).

Wykres  $\kappa(l)$  dla krzywej KŁ0 przedstawiono na rysunku 10 (oznaczony kolorem fioletowym). Największa bezwzględna wartość krzywizny występuje dla  $l_0 = 46,426$  m i wynosi  $\kappa_{\max} = 0,0091483$  rad/m. Natomiast największa wartość  $\Delta\kappa/\Delta l$  występuje na początku krzywej łączącej dla  $l \in \langle 0; 10,0003 \rangle$  m. Przy wyznaczaniu prędkości  $V^{(f)}$  należy przyjąć  $\Delta\kappa = 0,003412$  rad/m. Zbliżone do siebie prędkości  $V^{(a)}$  i  $V^{(f)}$  uzyskano dla  $h_0 = 65$  mm; wyniosły one:  $V^{(a)} = 42,501$  km/h i  $V^{(f)} = 41,581$  km/h. Ponieważ z wzoru (7) wynika  $\Delta a = 0,248$  m/s<sup>2</sup>, prędkość  $V^{(\psi)} = 72,623$  km/h. Stosując krzywą KŁ0 można zatem uzyskać prędkość  $V_{\max} = 41$  km/h. Jest to mniej niż w przypadku zastosowania łuków kołowych z krzywymi przejściowymi (czyli w Wariancie IIIB). Przedstawionego rozwiązania nie można w tej sytuacji rekomendować.



Rys. 11. Wyznaczone krzywe łączące KŁ0, KŁ1, KŁ2, KŁ3 i KŁ4 dla Układu III na tle rozwiązań standardowych w Wariancie IIIA i Wariancie IIIB [opracowanie własne]

#### 5.4. Zastosowanie wydłużonej krzywej łączącej (Wariant IIID)

Stosując analogiczny tok postępowania i przyjmowane założenia jak w podrozdziale 4.4, wyznaczono wydłużoną krzywą łączącą KŁ1 dla  $\Delta L_1 = 25$  m. Współrzędne skrajnych punktów tej krzywej w układzie  $x, y$  wynoszą:  $x_{A1} = -117,468$  m,  $y_{A1} = -67,820$  m oraz  $x_{C1} = 280,668$  m,  $y_{C1} = -60,887$  m.

W układzie współrzędnych  $\bar{x}_{(i)}, \bar{y}_{(i)}$  należy połączyć ze sobą punkt  $A_1 (0, 0)$  z punktem  $C_1$  o współrzędnych  $\bar{x}_{C1} = \Delta \bar{x} = 348,263$  m,  $\bar{y}_{C1} = \Delta \bar{y} = -193,064$  m ( $\bar{s}_{A1} = 0$ ,  $\bar{s}_{C1} = -0,17633$ ). Współczynniki wielomianu (17) są następujące:  $a_1 = -3,98915E-05$  1/m<sup>2</sup>,  $a_2 = 1,67642E-07$  1/m<sup>3</sup>,  $a_3 = -1,90149E-10$  1/m<sup>4</sup>. Wyznaczoną krzywą łączącą KŁ1 na tle rozwiązań standardowych oraz krzywych łączących KŁ0, KŁ2, KŁ3 i KŁ4 pokazano na rysunku 11 (oznaczoną kolorem jasnoniebieskim).

Wykres  $\kappa(l)$  dla krzywej łączącej KŁ1 przedstawiono na rysunku 10 (oznaczony kolorem jasnoniebieskim). Największa bezwzględna wartość krzywizny występuje

dla  $l_0 = 57,484$  m i wynosi  $\kappa_{\max} = 0,0070038$  rad/m. Z kolei największa wartość  $\Delta \kappa / \Delta l$  występuje na początku krzywej dla  $l \in \langle 0; 10,0001 \rangle$  m. Zbliżone do siebie prędkości  $V^{(a)}$  i  $V^{(f)}$  uzyskano dla  $h_0 = 65$  mm; wyniosły one:  $V^{(a)} = 48,575$  km/h i  $V^{(f)} = 49,466$  km/h. Ponieważ z wzoru (7) wynika  $\Delta a = 0,225$  m/s<sup>2</sup>, prędkość  $V^{(p)} = 79,834$  km/h. Na krzywej KŁ1 można zatem uzyskać prędkość  $V_{\max} = 48$  km/h. Jest to mniej niż w przypadku zastosowania łuków kołowych z krzywymi przejściowymi.

Kontynuowano więc wydłużanie krzywej łączącej, przyjmując  $\Delta L_2 = 50$  m dla krzywej KŁ2,  $\Delta L_3 = 75$  m dla krzywej KŁ3 oraz  $\Delta L_4 = 100$  m dla krzywej KŁ4. W tablicy 4 zestawiono podstawowe wartości liczbowe odnoszące się do wyznaczania przebiegu krzywych łączących.

Krzywe łączące z tablicy 6 pokazano na rysunku 11 (na tle rozwiązań standardowych). Wykresy krzywizny dla tych krzywych przedstawiono na rysunku 10. Na podstawie wyznaczonej krzywizny (oraz odpowiadającej przechyłki) wyznaczono prędkości jazdy pociągów na danym układzie, co obrazuje tablica 7.

Tablica 6

Podstawowe wartości liczbowe dotyczące wyznaczania krzywych łączących w Układzie III

| Krzywa łącząca | $\Delta l(i)$ [m] | $\Delta \bar{x}$ [m] | $\Delta \bar{y}$ [m] | $a_1$ [1/m <sup>2</sup> ] | $a_2$ [1/m <sup>3</sup> ] | $a_3$ [1/m <sup>4</sup> ] |
|----------------|-------------------|----------------------|----------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| KŁ0            | 0                 | 298,842              | -188,723             | -6,29471E-05              | 3,09547E-07               | -4,10172E-10              |
| KŁ1            | 25                | 348,263              | -193,064             | -3,98915E-05              | 1,67642E-07               | -1,90149E-10              |
| KŁ2            | 50                | 397,983              | -197,405             | -2,68843E-05              | 9,85532E-08               | -9,76705E-11              |
| KŁ3            | 75                | 447,503              | -201,746             | -1,89902E-05              | 6,16862E-08               | -5,42588E-11              |
| KŁ4            | 100               | 497,123              | -206,087             | -1,39209E-05              | 4,05691E-08               | -3,20656E-11              |

[Opracowanie własne].

Tablica 7

Kalkulacja prędkości dla wyznaczonych krzywych łączących w Układzie III

| Krzywa łącząca | $\Delta L(i)$ [m] | $L_{KL}$ [m] | $h_0$ [mm] | $\kappa_{\max}$ [rad/m] | $V^{(a)}$ [km/h] | $\max(\Delta h/\Delta l)$ [‰] | $V^{(f)}$ [km/h] | $V^{(\psi)}$ [km/h] | $V_{\max}$ [km/h] |
|----------------|-------------------|--------------|------------|-------------------------|------------------|-------------------------------|------------------|---------------------|-------------------|
| KŁ2            | 0                 | 365,517      | 65         | 0,0091483               | 42,501           | 2,42418                       | 41,581           | 72,623              | 41                |
| KŁ3            | 25                | 409,801      | 65         | 0,0070038               | 48,575           | 2,03775                       | 49,466           | 79,834              | 48                |
| KŁ4            | 50                | 455,128      | 65         | 0,0055453               | 54,590           | 1,75425                       | 57,461           | 92,735              | 54                |
| KŁ5            | 75                | 501,247      | 70         | 0,0045066               | 61,327           | 1,53813                       | 60,853           | 103,947             | 60                |
| KŁ6            | 100               | 547,975      | 70         | 0,0037398               | 67,320           | 1,36817                       | 68,412           | 113,733             | 67                |

[Opracowanie własne].

W rozwiązaniu standardowym (z krzywymi przejściowymi) prędkość  $V_{\max} = 50$  km/h, a długość układu wynosi 376,420 m. Zastosowanie krzywej łączącej o długości 547,975 m pozwala zwiększyć prędkość do  $V_{\max} = 67$  km/h. Nie musi to stanowić granicy dla podnoszonej prędkości, oczywiście pod warunkiem, że nie zaistnieją jakieś obiektywne ograniczenia dotyczące długości krzywej łączącej. Analiza przypadku  $W_1W_2 = 200$  m w pełni potwierdziła wcześniejsze wnioski odnoszące się do przypadku  $W_1W_2 = 400$  m.

## 6. Ogólna ocena uzyskanych rozwiązań

Przeprowadzona analiza potwierdziła w pełni tezę sformułowaną w pracy [16], że w przypadku łuków odwrotnych powinna być zachowana odpowiednia odległość pomiędzy punktami przecięcia sąsiednich kierunków głównych trasy, czyli że nie może być ona zbyt mała. Jeśli odległość ta dla danego układu kierunków głównych jest znaczna i stwarza możliwość rozwiązania problemu przy zastosowaniu łuków kołowych z krzywymi przejściowymi, wówczas łuki odwrotne nie wprowadzają istotnego ograniczenia możliwości do uzyskania prędkości jazdy pociągów. Uwiłocznio sił to w rozpatrywany Układzie I, w którym odległość pomiędzy punktami głównymi wynosiła 1000 m. Jak wykazano, możliwa do uzyskania prędkość wyniosła tam 132 km/h.

W analogicznym Układzie II, z ograniczeniem odległości pomiędzy punktami głównymi do 400 m, rozwiązanie standardowe (tj. przy zastosowaniu łuków kołowych z krzywymi przejściowymi) okazało się już nie do przyjęcia z uwagi na możliwą prędkość wynoszącą zaledwie 77 km/h. W związku z tym podjęto próbę odejścia od standardowego rozwiązania i wyznaczenia krzywej łączącej ze sobą w sposób bezpośredni skrajne kierunki główne układu geometrycznego. Wykorzystano przy tym odpowiednie równania różniczkowe z warunkami brzegowymi dla rozwiązania wielomianowego. Jak się okazało, prak-

tyczną przydatnością może się wykazać model układu uwzględniający zerową wartość krzywizny w punkcie początkowym i w punkcie końcowym.

To jednak nie wystarcza. Wyznaczoną krzywą łączącą należy jeszcze wydłużyć przez odpowiednie dobranie punktów skrajnych usytuowanych na *Prostej 1* i *Prostej 3*. W artykule pokazano sposób postępowania prowadzący do uzyskania prędkości pociągów równej 100 km/h. Wymagało to w danym przypadku przesunięcia punktu *A* na *Prostej 1* o 200 m wraz z analogicznym przesunięciem punktu *C* na *Prostej 3*.

W trzecim rozpatrywanym układzie łuków odwrotnych (tj. w Układzie III) ograniczono odległość pomiędzy punktami głównymi do 200 m. Zastosowaniu łuków kołowych z krzywymi przejściowymi pozwala – teoretycznie – uzyskać prędkość  $V_{\max} = 50$  km/h. Jest to więc niewielka prędkość, a możliwość jej praktycznego zastosowania można podważyć względami konstrukcyjnymi. Wpisywanie się kół taboru kolejowego w tor przy promieniu łuku kołowego mniejszym niż 110 m trudno byłoby zaakceptować.

Pozostaje zatem zastosowanie wydłużonej krzywej łączącej. Umożliwiło to uzyskanie prędkości równej 67 km/h, przy wyeliminowaniu zastrzeżeń natury konstrukcyjnej. W danym przypadku wartości przesunięcia punktu *A* na *Prostej 1* i punktu *C* na *Prostej 3* wyniosły 100 m.

## 7. Podsumowanie

Na kolei (pod względem długości) nadal zdecydowanie dominują linie tradycyjne, najczęściej zbudowane jeszcze w XIX stuleciu i po dziś są eksploatowane. Nie ulega wątpliwości, że należałoby je dostosować do współczesnych wymagań. Dotyczy to zwłaszcza linii kolejowych przebiegających w trudnych warunkach terenowych (np. w terenie górskim), na których występują małe promienie łuków poziomych, a dodatkowo niekorzystne układy geometryczne, takie jak łuki kosztowe i łuki odwrotne. Poprawa jakości

tych linii, prowadząca do zwiększenia prędkości jazdy pociągów, wymaga przeprowadzenia odpowiednich działań modernizacyjnych.

Niniejszy artykuł podejmuje kwestię modyfikacji łuków odwrotnych, czyli układu geometrycznego złożonego z dwóch następujących po sobie łuków kołowych (najczęściej o różnych promieniach), skierowanych w przeciwnych kierunkach i połączonych ze sobą w bezpośredni sposób. Łuki te stwarzają określone problemy eksploatacyjne spowodowane gwałtownymi zmianami krzywizny, jakie na nich występują. Artykuł stanowi kontynuację problematyki podjętej w pracy [16]. Zostały tam przedstawione rozwiązania standardowe, polegające na utworzeniu układu geometrycznego złożonego z dwóch odwrotnie skierowanych łuków kołowych i czterech krzywych przejściowych, łączących te łuki z odpowiednimi kierunkami głównymi trasy. Zwrócono jednak uwagę na występujące ograniczenia w stosowaniu proponowanej metody. Chodziło o zachowanie odpowiedniej odległości pomiędzy punktami przecięcia sąsiednich kierunków głównych (nie może być ona zbyt mała). Na modernizowanych liniach kolejowych warunek ten bardzo często nie jest spełniony i wówczas należy łuki odwrotne odpowiednio zmodyfikować.

W artykule rozpatrzono trzy układy geometryczne łuków odwrotnych. W Układzie I występowała znaczna odległość pomiędzy punktami głównymi trasy (tj. 1000 m). Jak wykazano, w takim przypadku można z powodzeniem stosować standardowe rozwiązanie, polegające na wykorzystaniu łuków kołowych z krzywymi przejściowymi. Przy znacznej odległości pomiędzy punktami głównymi łuki odwrotne nie wprowadzają istotnego ograniczenia prędkości jazdy pociągów.

W Układzie II przyjęto ograniczoną odległość pomiędzy punktami głównymi trasy (tj. 400 m). Z perspektywy prędkości pociągów standardowe rozwiązanie (z krzywymi przejściowymi), w danym przypadku nie spełniło swojego zadania. Zaproponowano więc wprowadzenie krzywej łączącej ze sobą dwa skrajne kierunki główne; spełnia ona odpowiednie warunki brzegowe i przyjęte równanie różniczkowe. Krzywą tę można wydłużać, zwiększając maksymalną prędkość pociągów na trasie. Ograniczeniem mogą być pojawiające się przeszkody, które wynikają z uwarunkowań terenowych.

Układ III charakteryzuje się niewielką odległością pomiędzy punktami głównymi trasy (tj. 200 m). Standardowe rozwiązanie okazuje się tutaj nie do przyjęcia, również ze względów konstrukcyjnych, tj. wpisywania się kół taboru kolejowego w tor przy bardzo małych promieniach łuków kołowych. Zastosowanie wydłużonej krzywej łączącej może się w tej sytuacji okazać jedynym korzystnym rozwiązaniem.

Zaproponowana metoda modyfikacji łuków odwrotnych stwarza dużą szansę na pokonanie problemów występujących w procesie projektowania. Jest to szczegól-

nie istotne dla linii kolejowych przebiegających w trudnych warunkach terenowych, na których często występują niewielkie odległości pomiędzy punktami głównymi łuku odwrotnego. Niniejszy artykuł prezentuje optymalny tok postępowania w takich sytuacjach.

## Literatura

1. Aghastya A. et al.: *A new geometric planning approach for railroads based on satellite imagery*, AIP Conference Proceedings, Vol. 2671/2023, article ID: 50005, AIP Publishing.
2. Akkerman G., Akkerman S., Kargapoltssev D.: *Modeling as a source of innovation in design railway*, Conference Paper of the VIII International Scientific Siberian Transport Forum (TranSiberia 2019), 2020, pp. 627–632, Springer.
3. Cascetta E. et al.: *Economic growth, transport accessibility and regional equity impacts of high-speed railways in Italy: Ten years ex post evaluation and future perspectives*, Transportation Research, Part A: Policy and Practice, Vol. 139, pp. 412–428, Elsevier.
4. Chen H., Zhu T., Zhao L.: *High-speed railway opening, industrial symbiotic agglomeration and green sustainable development – empirical evidence from China*, Sustainability, No. 5/2024, article ID: 2070, Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
5. Fang C. et al.: *Wheel-rail contact and friction models: A review of recent advances*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, Vol. 237/2023, pp. 1245–1259, Sage Journals.
6. Gao D., Wang G.: *Does the opening of high-speed rails improve urban carbon efficiency? Evidence from a spatial difference-in-difference method*, Environmental Science and Pollution Research, Vol. 30/2023, pp. 101873–101887, Springer Nature.
7. Gao H. et al.: *A novel wheel wear indicator in regard to wheel-rail contact parameters and vehicle hunting stability*, Engineering Failure Analysis, Vol. 167/2025, Part A, article ID: 108967, Elsevier.
8. Guerrieri M.: *Fundamentals of railway design, Chapter: The alignment design of ordinary and high-speed railways*, Textbook, 2023, pp. 21–56, Springer.
9. Hamarat M. et al.: *New insights from multibody dynamic analyses of a turnout system under impact loads*, Applied Sciences, No. 19/2019, article ID: 4080, Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
10. Kalkulator długości łuku krzywej, Kalkulator.best [online], [dostęp: 31 maja 2026 r.], dostępny na WWW. kalkulator.best/kalkulator-dlugosci-luku-krzywej.
11. Kargapoltssev D.: *Analysis of the concept “Spatial curve on the railway” with modelling elements*, AIP Conference Proceedings, No. 1/2023, article ID: 020024, AIP Publishing.

12. Kobryń A.: *Design of curvilinear sections in vertical alignment of roads and railways using general transition curves*, Automation in Construction, Vol. 163/2024, article ID: 105423, Elsevier.
13. Koc W.: *Analytical method of connecting parallel tracks located in a circular arc using curved turnouts*, Journal of Transportation Engineering, Part A: Systems, No. 3/2020, article ID: 4019081, American Society of Civil Engineers.
14. Koc W.: *Krzywe przejściowe dla kolei dużych prędkości*, Problemy Kolejnictwa – Railway Reports, zeszyt 204/2025, s. 53-66, Wydawnictwo Instytutu Kolejnictwa.
15. Koc W.: *Modeling of compound curves on railway lines*, Geomatics, Vol. 2/ 2025, article ID: 21, Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
16. Koc W.: *Modeling of reverse curves on a railway line using the analytical design method*, Designs, No. 1/2026, article ID: 5, Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
17. Koc W.: *Podstawowe warianty analitycznej metody projektowania układów geometrycznych toru*, Problemy Kolejnictwa – Railway Reports, zeszyt 200/2023, s. 39–53, Wydawnictwo Instytutu Kolejnictwa.
18. *Kompleksowe oprogramowanie do szczegółowego projektowania i tworzenia dokumentacji z zakresu infrastruktury lądowej*, Autodesk Civil 3D [online, dostęp: 31 maja 2026 r.], dostępny na WWW.autodesk.pl/products/civil-3d.
19. Milosevic M.D.G. et al.: *Condition monitoring of railway crossing geometry via measured and simulated track responses*, Sensors, No. 3/2022, article ID: 1012, Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
20. *Oprogramowanie do projektowania torów*, Bentley Rail Track [online], [dostęp: 31 maja 2026 r.], dostępny na WWW.bentley.com/software/rail-design.
21. Pan J.Y.: *Understanding high-speed rail users in the US – Environmental and sustainability perspectives*, Travel Behaviour and Society, Vol. 34/2024, article ID: 100670, Elsevier.
22. Qazi A. et al.: *A semi-analytical numerical method for modelling the normal wheel-rail contact*, Vehicle System Dynamics, Vol. 60/2022, pp. 1322–1340, Taylor & Francis.
23. Qian H.H. et al.: *The effect of the macroscopic surface morphology caused by the uneven wear on friction induced vibration*, Tribology International, Vol. 154/2021, article ID: 106672, Elsevier.
24. *Rozporządzenie Ministra Transportu i Gospodarki Morskiej z dnia 10 września 1998 r. w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budowle kolejowe i ich usytuowanie*, Dziennik Ustaw, rok 1998, nr 151, poz. 987.
25. *Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 15 października 2012 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych*, Dziennik Ustaw, rok 2012, poz. 1247.
26. Shih J.-Y., Ambur R., Dixon R.: *Developing a detailed multi-body dynamic model of a turnout based on its finite element model*, Vehicle System Dynamics, No. 3/2023, pp. 725-738, Taylor & Francis.
27. *Standardy Techniczne – szczegółowe warunki techniczne dla modernizacji lub budowy linii kolejowych do prędkości  $V_{max} \leq 250$  km/h, Tom I – Droga szynowa – Załącznik ST-T1-A6 – Układy geometryczne torów*, PKP Polskie Linie Kolejowe S.A., Warszawa 2021.
28. Tonia E.C., Tonia C.N.: *Compound and reversed curves*, in Geometric Procedures for Civil Engineers, Springer International Publishing AG, Cham, Germany, 2016, pp. 185–242.
29. Wang Z. et al.: *Dynamic wheel-rail adhesion characteristics on wet curved tracks considering surface roughness*, Physics of Fluids, No. 2/2025, article ID: 022104, AIP Publishing.
30. Wang Z. et al.: *Effects of wheel tread hollow wear on wheel-rail adhesion under wet condition*, Tribology International, Vol. 211/2025, article ID: 110927, Elsevier.
31. Xiang Z.Y. et al.: *The effects of the friction block shape on the tribological and dynamical behaviours of high-speed train brakes*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 194/2021, article ID: 106184, Elsevier.
32. Xiao F., Wang J., Du D.: *High-speed rail heading for innovation: The impact of HSR on intercity technology transfer*, Area Development Policy, Vol. 7/2022, pp. 293–311, Taylor & Francis.
33. Yamamoto M., Yamamoto T., Nishiyama S.: *Investigation of trajectory planning of a travel route while turning at an intersection*, Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, No. 7/2018, pages JAMDSM0117, J-STAGE.
34. Zboński K., Woźnica P.: *Railway transition curves curvature – should it be smooth in the extreme points or not, or something else?* Applied Sciences, No. 22/2025, article ID: 12066, Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
35. Zhu H. et al.: *Review of research on the influence of vibration and thermal fatigue crack of brake disc on rail vehicles*, Engineering Failure Analysis, Vol. 153/2023, article ID: 107603, Elsevier.